OBRAS PUBLICADAS PELO AUTOR

Portaria Ministerial de 18 de abril de 1931

Primeiro Ano de Matemática. *Dezenove edições,* 95 milheiros.
Volume cartonado . . . Cr.$ 13,00

Segundo Ano de Matemática. *Tress edições,* 65 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 14,00

Terceiro Ano de Matemática. *Nove edições,* 45 milheiros.
Volume cartonado . . Cr.$ 15,00

Quarto Ano de Matemática. *Sete edições,* 35 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 13,00

Quinto Ano de Matemática. *Quatro edições,* 20 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 15,00

Exercícios de Matemática — Terceiro Ano. 1 400 exercícios numéricos e problemas, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 6,00

Exercícios de Matemática — Quarto Ano. 900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 5,00

Exercícios de Matemática — Quinto Ano. 900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 5,00

Portaria Ministerial de 11 de julho de 1942

Elementos de Matemática, Primeiro Volume.
Dezesseis edições, 80 milheiros. *Volume cartonado*

Elementos de Matemática, Segundo Volume.
Doze edições, 60 milheiros. *Volume cartonado*

Elementos de Matemática, Terceiro Volume.
Nove edições, 45 milheiros. *Volume cartonado*

Elementos de Matemática — Quarto Volume.
Seis edições, 30 milheiros. *Volume cartonado*

Problemas de Matemática — Primeira Série Ginasial.
780 exercícios, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 6,00

Problemas de Matemática — Segunda Série Ginasial.
750 exercícios, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 7,00

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
RUA DOS GUSMÕES, 639 — SÃO PAULO

SÉRIE 2.ª — LIVROS DIDÁTICOS — VOL. 126
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

TERCEIRO VOLUME

para a

Terceira Série do Curso Ginasial

Com numerosos exercícios orais e de classe; 850 exercícios escritos e problemas

A Matemática é uma escada altíssima cujos degraus, embora pequeninos, devem ser subidos vagarosamente, e de um em um.

11.ª edição — 53 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
São Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Bahia - Pará - Pôrto Alegre
1947

V. J. M. J. V. D. B.

Belém, 23 de março de 1936

Exmo. Sr. Prof. Jacomo Stávale

Saudações.

Entusiasmado pelo método pedagógico e didático dos livros publicados por V. S., venho hoje dar-lhe os meus efusivos parabens por obra tão útil ao ensino no nosso caro Brasil.

Sou professor de Matemática do Colégio Salesiano Nossa Senhora do Carmo, Belém, Pará. Já conhecedor, em Recife, dos livros e método de V. S., e tendo sido transferido para êste Colégio como Diretor dos Estudos, sem mais adotei os preciosos livros didáticos de Matemática, da autoria de V. S. Sirva também a presente como um preito de justiça que há muito desejava externar, pelo grande auxílio que as obras de V. S. têm trazido às minhas aulas.

Aceite, pois, os entusiásticos parabens dêste humilde colega que tem a honra de se professar seu amigo e admirador

(a) PADRE JOSÉ CARVALHO DE MENDONÇA
da Congregação Salesiana.
Encarregado dos Estudos no Colégio Salesiano
Nossa Senhora do Carmo, Belém - Pará

Prefácio

E' indigno de se chamar homem, quem ignora que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis.

Platão

Sem dúvida alguma, a transformação de um polinômio em um produto ou, como dizemos abreviadamente, a *fatoração algébrica*, é um dos assuntos de maior relevância em um curso de Álgebra. A fatoração algébrica é, para toda a Matemática, o que é a tabuada para o cálculo aritmético. Em Álgebra fazemos, a todo o instante, a transformação de uma expressão em outra eqüivalente; raramente operamos com estas mesmas expressões.

Daí a minha constante preocupação, quer como professor, quer como autor, em desenvolver tanto quanto possível, embora de um modo elementar, êste magnífico instrumento de trabalho que é, para os estudantes de Matemática, a transformação de polinômios em produtos.

Seguindo esta orientação incluí no presente compêndio, um estudo muito elementar sôbre a divisão de um polinômio por outro. Precisava dêste ponto de apôio para apresentar, *entre os casos simples de fatoração algébrica*, a decomposição em fatores dos binômios $a^3 + b^3$ e $a^3 - b^3$. Com efeito, não me pareceu didático dizer apenas aos estudantes que

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

sem lhes ensinar, as mesmo tempo, o meio mais simples e racional para verificar essas identidades.

Cabe aos meus colegas, professores de Matemática, dizerem se fiz bem ou mal, pondo neste livro alguma coisa mais do que o exigido pelo programa oficial; aguardo também com muito prazer os seus reparos honestos e bem intencionados sôbre toda a matéria contida neste compêndio.

S. Paulo, março de 1943

O AUTOR

Rua Safira, 9

Prefácio da Terceira Edição

do

Terceiro Ano de Matemática

APENAS um episódio. Antes de narrá-lo, porém, é necessário dizer que os meus alunos são obrigados a trabalhar, em classe, com dois compêndios de Matemática: o da série que estão cursando, e o da série anterior.

O caso deu-se em junho p. passado. Preparava-me eu para explicar aos meus alunos de uma terceira série que: *multiplicando ou dividindo o índice de um radical e o expoente do radicando, por um mesmo número, o valor do radical não se altera.*

Fui ao quadro-negro, escreví

$$a^{\frac{2}{5}}$$

e perguntei à classe qual o significado desta expressão. Ninguem respondeu. Então pedí aos alunos que consultassem o **Segundo Ano de Matemática.** Cinco minutos depois, quasi todos os estudantes levantavam a mão, agitados, ansiosos e satisfeitos, prontos para interpretarem a expressão acima mencionada.

E assim pude demonstrar o teorema referido e que, naturalmente, toda a classe compreendeu porque a sua única dificuldade está na interpretação do expoente fracionário.

E se não tivessem o compêndio? Teriam de recorrer aos *famosos cadernos de apontamentos!* Mas, onde encontrá-los? Impossível! De há muito teriam desaparecido no turbilhão das varreduras domésticas.

S. Paulo, março de 1936

O AUTOR

Rua Safira, 9

Abreviaturas usadas neste livro

E.M.P.V.	Elementos de Matemática–Primeiro Volume
E.M.S.V.	Elementos de Matemática–Segundo Volume
E.M.T.A.	Exercicios de Matemática–Terceiro Ano
C.Q.D.	como queríamos demonstrar
o.p.v.	opostos pelo vértice
t.p.m.	tem por medida
alt.-int.	alternos-internos
alt.-ext.	alternos-externos
col.-int.	colaterais-internos
col.-ext.	colaterais-externos

H.	hipótese	T	tese
○	circunferência	ⓢ	circunferências
⊥	perpendicular	⊥ₛ	perpendiculares
△	triângulo	△ₛ	triângulos
≠	diferente de	∥	paralela ou paralelas
▱	paralelogramo	▱ₛ	paralelogramos
∠	ângulo	∠ₛ	ângulos
hip.	hipótese	∴ .	donde, portanto, então, etc..
compls..	complementares	supls..	suplementares
$\hat{ABC}$ ...	ângulo ABC	$\hat{1}$	ângulo 1
$\hat{A}$	ângulo A	∼ ..	semelhante ou semelhantes
tang. ...	tangente	sec ...	secante

Índice-Sumário

ÁLGEBRA

Cap. I — Números Relativos

§§		Págs.
1.	Somar números naturais é contar	1
2.	Somar e subtrair com o auxílio de objetos quaisquer	1
3.	Um gráfico para somar e subtrair	2
4.	E' possível subtrair 18 de 13?	3
5.	Extensão do campo numérico	[illegible]
6.	Números positivos e negativos	4
7.	Os números negativos e os débitos	5
8.	Os números negativos e as temperaturas	5
9.	Os números negativos e os lucros e prejuízos	5
10.	Valor absoluto de um número qualificado; módulo..	6
11.	O sinal + (*mais*) e o sinal — (*menos*)	7
12.	Adição de números relativos	8
13.	Valor da soma em relação às parcelas	9
14.	Subtração de números relativos	10
15.	A soma de dois números simétricos é zero	13
16.	Simplificação da expressão — (+10) ou — (—10)..	14
17.	Expressões	14
18.	Multiplicação de números relativos	15
19.	Divisão de números relativos	16
20.	Números fracionários relativos	17

Cap. II — Expressões Algébricas

21.	Os símbolos algébricos	19
22.	Expressão algébrica	20
23.	Têrmos semelhantes	22
24.	Ordenar um polinômio	24
25.	Classificação das expressões algébricas	24

Cap. III — Operações Algébricas

26. Adição algébrica........ 27
27. Subtração algébrica........ 29
28. Potência de um número........ 30
29. Multiplicação de monômios........ 31
30. Multiplicação de um polinômio por um monômio.... 32
31. Multiplicação de dois polinômios........ 34
32. Fórmulas de multiplicação algébrica; identidades.... 37
33. Quadrado e raiz quadrada de um monômio........ 42
34. Cubo e raiz cúbica de um monômio........ 43
35. Quarta potência e raiz quarta de um monômio..... 44
36. Potências e raízes dos monômios........ 45
37. Divisão de monômios........ 45
38. O expoente zero........ 46
39. O expoente negativo........ 47
40. O expoente fracionário........ 48
41. As frações algébricas........ 49
42. O sinal nas frações algébricas........ 51
43. Grau de uma expressão algébrica........ 52
44. Divisão algébrica........ 54
45. Divisão de um polinômio por um monômio........ 55
46. Divisão de um polinômio por um polinômio........ 56
47. Divisão com resto........ 63
48. Divisibilidade por **x — a**........ 65
49. Divisibilidade por **x + a**........ 68
50. Casos notáveis de divisão algébrica........ 69
51. A divisibilidade em Álgebra........ 72
52. Fatoração de um monômio........ 73
53. Fatoração de polinômios........ 74

I. *Caso do fator comum*........ 74
II. *Fatoração por agrupamento*........ 75
III. *Caso do trinomio quadrado perfeito*........ 76
IV. *Caso da diferença de dois quadrados*........ 78
V. *Caso do trinomio do segundo grau*........ 79
VI. *Caso da soma ou diferença de dois cubos*...... 82
VII. *Caso do trinomio* $a^4 + a^2b^2 + b^4$........ 83
VIII. *Caso da soma ou diferença de duas potências com expoentes iguais e bases diferentes*........ 83

54. Máximo divisor comum........ 85
55. M.D.C. pelo processo das divisões sucessivas........ 87
56. Mínimo múltiplo comum........ 90

Cap. IV — Frações Algébricas

57. Definição........ 92
58. Simplificação das frações algébricas........ 93
59. Redução de frações algébricas ao mesmo denominador 94
60. Adição e subtração de frações algébricas........ 95
61. Multiplicação e divisão de frações algébricas........ 96

Cap. V — Equações do Primeiro Grau

62. Definições........ 99
63. Incógnitas e raízes........ 100
64. Equações eqüivalentes........ 101
65. Princípios de eqüivalência........ 101
66. Restrições ao segundo princípio........ 103
67. Resolução de uma equação........ 106
68. Equações com denominadores numéricos........ 109
69. Equações literais........ 113
70. Resolução algébrica de um problema........ 114
71. Forma normal da equação do primeiro grau com uma incógnita........ 117
72. Discussão da fórmula $x = \frac{b}{a}$........ 117
73. Indeterminações aparentes........ 120
74. Classificação das equações........ 123
75. Equações de grau superior ao primeiro........ 127

Cap. VI — Geometria Dedutiva

76. Proposições geométricas........ 129
77. O método dedutivo........ 131
78. Métodos de demonstração........ 132
79. O ponto, a reta e o plano........ 135
80. Figuras geométricas........ 136
81. Divisão da Geometria........ 137

Cap. VII — A Reta

82. Ângulos........ 138
83. Ângulos adjacentes........ 140
84. A medida dos ângulos........ 142
85. Soma dos ângulos........ 144
86. Ângulos complementares e suplementares........ 143
87. Bissetriz de um ângulo; ∡ o. p. v........ 147

88. Rotações de semiplanos........ 150
89. Perpendiculares e oblíquas........ 151
90. A mediatriz........ 156
91. A mediatriz é um lugar geométrico........ 157
92. Polígonos........ 159
93. Triângulos........ 160
94. O triângulo isósceles........ 162
95. Grandeza relativa dos lados de um triângulo........ 164
96. Linhas envolventes e envolvidas........ 164
97. Igualdade de triângulos quaisquer........ 165
98. Igualdade de triângulos retângulos........ 169
99. A bissetriz e suas propriedades........ 170
100. A bissetriz é um lugar geométrico........ 172
101. Definição de paralelas........ 172
102. Teoremas relativos às paralelas........ 173
103. Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal........ 175
104. O verdadeiro postulado de Euclides........ 178
105. Porções de paralelas entre paralelas........ 178
106. Mais um lugar geométrico........ 179
107. Ângulos cujos lados são paralelos........ 180
108. Ângulos cujos lados são perpendiculares........ 181
109. Soma dos ângulos de um triângulo........ 182
110. Os quadriláteros........ 184
111. Soma dos ângulos de um quadrilátero........ 185
112. O paralelogramo........ 185
113. As diagonais do paralelogramo........ 188
114. Simetria em relação a um ponto........ 190
115. Igualdade e simetria........ 192
116. Simetria em relação a uma reta........ 192
117. O retângulo........ 194
118. O losango........ 196
119. O quadrado........ 198
120. O trapézio........ 199
121. As mediatrizes de um triângulo........ 200
122. As alturas de um triângulo........ 201
123. As bissetrizes de um triângulo........ 202
124. O segmento retilíneo que liga os meios de dois lados de um triângulo........ 203
125. As medianas de um triângulo........ 205
126. A mediana de um trapézio........ 206
127. Ângulos e diagonais de um polígono........ 208
1. As diagonais de um polígono........ 209
128. A soma dos ângulos de um polígono........ 210
129. O ângulo de um polígono regular........ 211
130. A soma dos ângulos externos de um polígono........ 211
131. A [illegible]dade de polígonos........ 212
132. Igual

CAP. VIII — O Círculo

133. A circunferência é um lugar geométrico........ 214
134. A divisão da circunferência........ 216
135. A secante e a tangente........ 217
136. Arcos e cordas........ 218
137. A distância de uma corda ao centro........ 222
138. Traçar uma circunferência que passe por três pontos dados........ 223
139. As propriedades da tangente........ 224
140. Cordas paralelas........ 225
141. Distância de um ponto a uma circunferência........ 226
142. Circunferências secantes e tangentes........ 228
143. Posições mútuas de duas circunferências........ 230
144. Medida comum de duas grandezas da mesma espécie........ 231
145. Razão de duas grandezas da mesma espécie........ 233
146. Grandezas comensuráveis e incomensuráveis........ 234
147. O ângulo central........ 235
148. O ângulo inscrito........ 239
149. Segmento circular........ 240
150. Ângulo formado por uma tangente e uma corda........ 241
151. Ângulos formados por secantes e tangentes........ 242
152. Segmento capaz........ 243
153. O quadrilátero inscrito........ 245

CAP. IX — Construções Geométricas

154. Definições e métodos........ 247
155. Traçado do hexagono regular inscrito........ 247
156. Traçado de perpendiculares........ 248
157. Construção de ângulos........ 250
158. Construção do segmento capaz de um ângulo dado........ 252
159. Construção de triângulos........ 253
160. Traçado de paralelas........ 254
161. Construção de quadriláteros........ 254
162. Traçado de tangentes........ 255
163. Igualdade de figuras planas........ 257

ÁLGEBRA

CAPÍTULO I

Números Relativos

1. Somar números naturais é contar. Quem soma números naturais, conta. Para somar 8 com 5 diremos: $8+1=9$, $9+1=10$, $10+1=11$, $11+1=12$, $12+1=13$. Portanto, $8+5=13$. E não há outro modo de somar 8 com 5. Quem quiser evitar êste trabalho, deve decorar a soma dos números 8 e 5. Entretanto, pode-se abreviar o processo indicado, recorrendo aos dedos; pegando sucessivamente em cada um dos dedos de uma das mãos, diremos: *nove*, *dez*, *onze*, *doze* e *treze*. Portanto, $8+5=13$.

Subtrair números naturais é contar. Quem subtrai números naturais, conta. Para subtrair 5 de 13, diremos $13-1=12$, $12-1=11$, $11-1=10$, $10-1=9$, $9-1=8$. Portanto, $13-5=8$. E não há outro modo de subtrair 5 de 13. Quem quiser evitar êste trabalho, deve decorar a diferença entre 13 e 8. Entretanto, pode-se abreviar o processo indicado, recorrendo aos dedos; pegando sucessivamente em cada um dos dedos de uma das mãos, diremos: *doze*, *onze*, *dez*, *nove* e *oito*. Portanto, $13-5=8$.

Do exposto resultam as duas conclusões seguintes:

a) *somar é contar para diante.*
b) *subtrair é contar para trás.*

2. Somar e subtrair com o auxílio de objetos quaisquer. Quem não sabe de cor as tábuas da adição e da subtração pode, portanto, somar e subtrair com o auxílio dos dedos. Mas, nós temos dez dedos de modo que, recorrendo a êles, não podemos efetuar operações como estas: $17+15$, $23+18$, $34-19$, $27-13$, etc.. E então?

Então é necessário recorrer a outros objetos: palitos, pedras, tábuas, árvores, doces, livros, etc.. Ora, é manifesta a dificuldade de somar e subtrair com o auxílio de objetos quaisquer.

Entretanto, os estudantes que ainda não decoraram as tábuas da adição e da subtração, não devem desanimar. Nós vamos oferecer-lhes um gráfico simples e fácil de manejar.

3. Um gráfico para somar e subtrair. Em uma fôlha de papel traçamos uma reta. (gráfico A) (*). Nesta reta escolhemos um ponto qualquer 0 (*zero*). A partir do ponto zero, *e para a direita*, (poderia ser para a esquerda) tomamos um segmento cujo comprimento pode ser qualquer, por exemplo, um centímetro; em

0 1 2 3 4 5 6 7 ∞

——|——|——|——|——|——|——|——|——

Gráfico A

continuação a êste segmento tomamos um segundo segmento que deverá ser igual ao primeiro; em continuação ao segundo segmento, um terceiro segmento que deverá ser igual ao primeiro, e assim sucessivamente. E estará feito o nosso gráfico.

Neste gráfico, o número 3 está representado pelo segmento que começa no ponto zero e termina no ponto 3; o número 3 não é o ponto 3; é o segmento 0|3, isto é, a soma dos segmentos 0|1, 1|2, 2|3. Anàlogamente, o número 5 não é o ponto 5; é a soma dos segmentos 0|1, 1|2, 2|3, 3|4, 4|5; é o segmento 0|5. (Quando dizemos, por exemplo, segmento 0|4, estamo-nos referindo ao segmento cuja origem é 0 (zero) e cuja extremidade é 4.) O gráfico A é a representação gráfica dos números inteiros, cuja sucessão se extende até o infinito, *como se costuma dizer;* o infinito é representado pelo símbolo ∞.

Com êste gráfico podemos somar e subtrair. Por exemplo, $7+5=?$ Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 7, contamos 5 segmentos *para a direita* e encontramos o número 12, que é a soma pedida. Outro exemplo: $4+11=?$ Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 4, contamos 11 segmentos *para a direita* e encontramos 15, que é a soma pedida.

(*) Convém desenhar êste gráfico no quadro-negro, prolongando a numeração dos segmentos até 28 ou 30 ou mais.

Quanto é $13-5$? Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 13, contamos 5 segmentos *para a esquerda* e encontramos 8, que é a diferença pedida. Quanto é $17-9$? Vamos áo gráfico, procuramos o ponto 17, contamos 9 segmentos *para a esquerda* e encontramos 8, que é a diferença pedida.

Portanto, *no gráfico* A *fica estabelecido que:*

a) ***somar é contar para a direita.***

b) ***subtrair é contar para a esquerda.***

4. E' possível subtrair 18 de 13? No campo numérico do gráfico A, de 13 não podemos subtrair 18. *A subtração é a operação que tem por fim, dados dois números, tirar do maior tantas unidades quantas são as do menor.* Logo, a operação $13-18$ é impossível. Vamos ao gráfico A e tentemos subtrair 18 de 13. Procuramos o ponto 13 e contamos 18 segmentos para a esquerda... mas, não é possível, porque à esquerda do ponto 13 há sòmente 13 segmentos e não 18.

5. Extensão do campo numérico. Voltemos ao gráfico A. A partir do ponto 0 (zero) e *para a esquerda,* marquemos mais uma porção de segmentos iguais aos que foram marcados para a direita. Teremos assim o gráfico B (*).

∞ 4 3 2 1 0 1 2 3 4 ∞

——|——|——|——|——|——|——|——|——|——

Gráfico B

E, agora, quanto é $13-18$? Vamos ao gráfico B, procuremos o ponto 13, contemos 18 segmentos *para a esquerda* e encontraremos o número 5. Portanto, $13-18=5$...

Ora!!!, dirão quasi todos os alunos que estão na classe, ouvindo atentamente o professor. O pasmo é geral. E os alunos que não proferiram aquela exclamação de espanto, olham para o professor, atônitos, assim com uns ares de quem diz: *O professor está brincando?!*

E êste espanto é justificado porque, no gráfico A ou B, o número 5 é representado pelos cinco primeiros segmentos situados *à direita* do ponto zero e não *à esquerda.* E êsse número é a diferença entre 13 e 8, como já aprendemos (§3).

(*) Reproduzir êste gráfico no quadro-negro, extendendo a numeração nos dois sentidos, mais ou menos até 20.

Mas o professor insiste dizendo que $13 - 18 = 5$ e que o resto ao qual êle se refere, não é o segmento 0|5, *à direita do ponto zero*, mas o segmento 0|5 *à esquerda do ponto zero*. Mas, como distinguir *êstes dois cincos?*

6. Números positivos e negativos. Para distinguir *os dois cincos* do gráfico B, estabelecemos a seguinte convenção: *todos os números situados à direita do ponto* 0 (zero) *serão chamados* **positivos** *e serão precedidos pelo sinal* + (mais); *todos os números situados à esquerda do ponto* 0 (zero) *serão chmados* **negativos** *e serão precedidos pelo sinal* — (menos).

Chamam-se **números qualificados** *ou* **números relativos**, *aos números* **associados** *com o sinal* + (mais) *ou com o sinal* — (menos)

E o gráfico B ficará modificado como se vê no gráfico C (*).

$$-\infty \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +\infty$$

Gráfico C

Os números positivos são velhos conhecidos nossos; são os números com os quais travámos conhecimento aos sete anos de idade, quando entrámos para a escola primária. Com êles trabalhámos durante os quatro anos do curso preliminar, aprendendo as operações que com êles se efetuam e as suas propriedades. Entretanto, não dizíamos então *números positivos;* dizíamos apenas *números naturais*, por não termos necessidade de distinguí-los dos *negativos*, que criámos com o gráfico C.

Estabelecendo a convenção dos sinais indicada, concluímos:

$$\mathbf{13 - 18 = -5}$$

Surgem assim os números negativos: *menos um, menos dois, menos três, menos quatro, menos cinco*, etc., e os números naturais, os nossos velhos conhecidos da escola primária, para não se confundirem com êsses recém-chegados chamados *números negativos*, tomam o nome de *números positivos* e são enunciados: *mais um, mais dois, mais três, mais quatro*, etc..

(*) Desenvolver êste gráfico no quadro negro, como os anteriores.

Portanto, é necessário não esquecer que os *números positivos são os números naturais.* (*)

7. Os números negativos e os débitos. Os números negativos existem? Existem, sim, sendo conhecidos com outros nomes. Vejamos.

Vera, passando pela Casa Sloper, viu uma flor cujo preço era 23 cruzeiros. Entrou na loja, abriu a sua bolsa, entregou ao empregado os 18 cruzeiros que a sua bolsa continha e retirou-se muito satisfeita com a linda flor que comprara. Como? Ora, dirá uma das colegas, Vera ficou devendo 5 cruzeiros, isto é, *Vera contraiu um débito.* Suponhamos que a bolsa de Vera contém 30 cruzeiros e a flor custa 23 cruzeiros; 30 cruzeiros − 23 cruzeiros = 7 cruzeiros. E Vera ainda tem 7 cruzeiros. Se a bolsa de Vera contém 18 cruzeiros, então 18 cruzeiros − 23 cruzeiros = −5 cruzeiros. E diremos que Vera ainda tem −5 cruzeiros (menos 5 cruzeiros). Quem tem a receber 15 cruzeiros tem +15 cruzeiros (mais 15 cruzeiros); quem tem a pagar 12 cruzeiros tem −12 cruzeiros (menos 12 cruzeiros). Portanto, *os débitos são números negativos, se os créditos forem considerados números positivos.*

8. Os números negativos e as temperaturas. O termômetro estava marcando 12 graus, mas chegou do Sul uma onda de frio e a temperatura baixou extraordinàriamente. O Dr. Oscar chama seu filho Carlos e pede-lhe que veja a temperatura do dia. E Carlos, que já conhece alguma coisa sôbre números relativos, responde: −5 *graus* (*menos* 5 *graus*). E, vendo seu pai admirado com esta resposta estranha, Carlos explica: *Pois é, papai, ontem o termômetro estava marcando* 12 *graus.* ***Mas,*** *devido à onda fria, a temperatura baixou* 17 *graus. Ora,* $12 - 17 = -5$. *Portanto, o termômetro está marcando* −5 *graus* (*menos* 5 *graus*) *ou, como se diz vulgarmente,* 5 *graus abaixo de zero.* Portanto, *as temperaturas abaixo de zero são números negativos, se as temperaturas acima de zero forem consideradas números positivos.*

9. Os números negativos e os lucros e os prejuízos. No fim de cada ano, as casas comerciais costumam dar um balanço para verificar se houve lucro ou prejuízo. O guarda-livros

(*) Convém lembrar que, nas considerações que vimos desenvolvendo desde o início dêste capítulo, estamos nos referindo sòmente aos números naturais.

da casa verifica cuidadosamente qual foi a *receita* (dinheiro que entrou), e qual a *despesa* (dinheiro que saiu).

Se a receita é de 40 000 cruzeiros e a despesa é de 32 000 cruzeiros, há lucro: 40 000 cruzeiros − 32 000 cruzeiros = 8 000 cruzeiros. Se a receita é de 35 000 cruzeiros e a despesa é de 35 000 cruzeiros, não há lucro: 35 000 cruzeiros − 35 000 cruzeiros = 0. Se a receita é de 32 000 cruzeiros e a despesa é de 40 000 cruzeiros, há prejuízo: 40 000 cruzeiros − 32 000 cruzeiros = 8 000 cruzeiros.

E diremos que, nestes três casos, os lucros foram +8 000 cruzeiros, 0 cruzeiros, − 8 000 cruzeiros.

No primeiro caso, o lucro é positivo; no segundo, é nulo; no terceiro, é negativo. Portanto, os *prejuízos de uma casa comercial são também exemplos de números negativos, se os lucros forem considerados números positivos.*

10. Valor absoluto de um número qualificado; módulo. *Valor absoluto de um número qualificado é o valor que êle tem quando se suprime o seu sinal; é o seu valor aritmético.* Por exemplo, o valor absoluto de + 10 ou − 10 é 10; de + 5 ou − 5 é 5.

O valor absoluto de um número relativo é também chamado *módulo* dêste mesmo número. Para indicar o módulo de um número relativo, coloca-se o mesmo entre dois pequenos traços verticais. Assim:

O valor absoluto ou módulo de $+5$ *é* $|+5|$.

» » » » » » -5 *é* $|-5|$.

Convém observar que os números negativos constituem *uma continuação* dos números positivos, *abaixo do número zero.* Consideremos a sucessão de números inteiros que se extende indefinidamente: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ... ∞. Tomemos agora um número qualquer, por exemplo, 12; vamos subtrair dêste número uma unidade, depois outra, depois outra, etc.. Teremos: 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. E não é possível continuar. Mas será possível se considerarmos a sucessão dos números relativos: 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, − 3, − 4, − 5, − 6, − 7, − 8, − 9, − 10, − 11, − 12, ... − ∞.

Destas observações resultam verdades importantes.

I. Os números positivos e negativos constituem uma única sucessão de números que se estende, que se desenvolve indefinidamente em dois sentidos opostos.

II. O número que divide esta sucessão em duas sucessões, a dos números positivos e a dos negativos, é o número zero. *Zero* é um número que indica falta de unidades; o indivíduo que tem 20 cruzeiros a pagar e 20 cruzeiros a receber, liquida suas contas e fica com *zero cruzeiros;* o negociante que gastou 50 000 cruzeiros em mercadorias e recebeu 50 000 cruzeiros pelas mesmas, ganhou *zero cruzeiros.*

III. Assim como 6 é maior que 5, 5 maior que 4, etc., do mesmo modo 0 (zero) é maior que − 1, − 1 é maior que − 2, − 2 é maior que − 3, etc.. Enfim, zero é maior do que qualquer número negativo e, de dois números negativos, o maior é aquele cujo valor absoluto ou módulo é menor. Por exemplo, − 3 é maior que − 5, que por sua vez é maior que − 7, etc..

IV. No gráfico C examinemos os números +8 e −8 (mais 8 e menos 8). Ambos estão representados pelo mesmo número de segmentos, isto é, por oito segmentos, e êsses segmentos são iguais. Portanto, em valor absoluto, êsses dois números são iguais. Entretanto, o número +8 começa no ponto 0 (zero) e se extende para a direita, ao passo que o número − 8 começa no ponto 0 e se estende para a esquerda. As extremidades dos números +8 e − 8 estão situadas sôbre a mesma reta XY e distam igualmente do ponto 0. Por êste motivo, dá-se aos números +8 e − 8 o nome de *números simétricos* (*). Portanto, dois números simétricos são dois números iguais em valor absoluto, mas com sinais contrários. Exemplos: +8 e − 8, +11 e − 11, etc..

Os números relativos dividem-se em três classes: a dos números positivos, a dos números negativos, e uma terceira classe que só compreende um número, o número **neutro** *ou* **zero.** (**)

Os números +0 e − 0 são chamados *números nulos.*

11. O sinal + (mais) e o sinal — (menos). Estes dois sinais indicam, respectivamente, a adição e a subtração, isto é,

(*) Dois pontos são simétricos em relação a um ponto dado, quando o ponto dado é o meio do segmento que liga os dois primeiros. (§114)

(**) J. I. Almeida Lisboa, *Lições de Álgebra Elementar, Primeiro Volume*, pág. 22.

as duas primeiras operações que se realizam sôbre os números. E, além desta função, êles desempenham mais uma, importantíssima: é a função de qualificar os números, isto é, indicar se êles, no gráfico C, devem ser contados de zero para a direita ou de zero para a esquerda; *indicar se êles são positivos ou negativos.*

12. Adição de números relativos. Para maior clareza, e até que os estudantes adquiram a prática dos números relativos, escreveremos entre parênteses os números dados com seus sinais. Seja a expressão

$$(+5)+(-7)+(+10)-(-5)+(-20)-(+20)$$

O sinal que está situado dentro dos parênteses, à esquerda de cada número, está qualificando êste mesmo número; o sinal *mais* e o sinal *menos* que estão ligando as expressões (+5), (−7), (+10), (−5), etc., estão indicando as operações que queremos realizar sôbre êsses números.

1.º *exemplo:* $(+8)+(+7)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número +8, contemos 7 segmentos *para a direita* e acharemos +15. Portanto, $(+8)+(+7)=+15$.

Justifiquemos êste resultado. Somar números positivos ou somar números naturais é a mesma coisa. (§8) Logo, $(+8)+(+7)=8+7=15=+15$.

2.º *exemplo:* $(-7)+(+12)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número −7, contemos 12 segmentos para a direita e acharemos +5. Portanto, $(-7)+(+12)=+5$.

Justifiquemos êste resultado. E' bastante lembrar que, somar um número positivo, isto é, um número natural, é contar para a direita, no gráfico A. (§3)

3.º *exemplo:* $(-17)+(+13)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número −17, contemos 13 segmentos para a direita e acharemos −4. Portanto, $(-17)+(+13)=-4$.

Êste resultado é fácil de justificar, recorrendo aos dois processos indicados no 2.º exemplo.

4.º *exemplo:* $(+15)+(-8)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número +15, contemos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos +7. Portanto, $(+15)+(-8)=+7$.

Justifiquemos êste resultado. Em primeiro lugar, a ordem das parcelas não influe no valor da soma. Logo, $(+15)+(-8)=(-8)+(+15)$. E, de acôrdo com o 2.º exemplo, $(-8)+(+15)=+7$. Portanto, $(+15)+(-8)=+7$.

5.º *exemplo:* $(+3)+(-10)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número +3, contemos 10 segmentos para a esquerda e acharemos −7. Portanto, $(+3)+(-10)=-7$. Êste resultado é fácil de justificar, recorrendo aos dois processos indicados no 4.º exemplo.

6.º *exemplo:* $(-4)+(-8)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número −4, contemos 8 segmentos para a esquerda e acharemos −12. Portanto, $(-4)+(-8)=-12$.

Para justificar êste resultado, diremos que −4 e −8 são, respectivamente, dois débitos e, naturalmente, se Décio deve 4 cruzeiros a Celso e 8 cruzeiros a Fernando, deve 12 cruzeiros aos dois.

Podemos, pois, estabelecer as seguintes regras:

I. Para somar dois números relativos com o mesmo sinal, somam-se os seus valores absolutos ou módulos e dá-se à soma o sinal que os dois números têm. (1.º e 6.º exemplos)

II. Para somar dois números relativos com sinais contrários, calcula-se a diferença entre os valores absolutos ou módulos dos dois números dados, e dá-se ao resultado o sinal do número que tem maior valor absoluto. (2.º, 3.º, 4.º e 5.º exemplos)

13. Valor da soma em relação às parcelas. Quando se consideram os números naturais a soma é sempre maior do que qualquer uma das parcelas. Já não acontece o mesmo, quando se consideram os numeros relativos; no 2.º exemplo do parágrafo anterior, a soma +5 é maior do que a parcela −7, porém não é maior do que a parcela +12.

Exercício. Calcular a soma seguinte:

$$(+8)+(-7)+(+15)+(-13)+(-20)+(2)+(+16)+(-9)$$

Em primeiro lugar somamos todos os números positivos, depois os negativos e finalmente as duas somas. Teremos:

$$(+8) + (+15) + (+2) + (+16) = +41$$
$$(-7) + (-13) + (-20) + (-9) = -49$$
$$(+41) + (-49) = -8$$

Exercícios. Série I

1. $(+234)+(+547) =$ +781
2. $(+512)+(-864) =$ −352
3. $(-841)+(+637) =$ −204
4. $(+37)+(+58)+(+93) =$ +188
5. $(+748)+(-329) =$ + 419
6. $(-732)+(+987) =$ + 255
7. $(-549)+(-785) =$ −1334
8. $(-15)+(-87)+(-72) =$ −174
9. $(+43)+(-87)+(+28)+(+53)+(-387)+(-128)+(+415) =$ −63
10. $(-34)+(-38)+(-42)+(-59)+(+85)+(+137)+(-203) =$
11. $(+17)+(-18)+(+543)+(-376)+(-641)+(+84)+(-15) =$
12. $(-37)+(-48)+(-57)+(-74)+(+123)+(+235)+(+436) =$
13. $(-213)+(+315)+(+518)+(-722)+(-88)+(-75)+(+429) =$
14. $(+257)+(-813)+(+569)+(-137)+(-146)+(-158)+(-174) =$
15. $(+483)+(-75)+(-84)+(-97)+(-103)+(-125)+(-150) =$

14. Subtração de números relativos. 1.º *exemplo :* $(+15)-(+8)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número $+15$, contemos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos $+7$. Portanto, $(+15)-(+8) = +7$.

Para justificar êste resultado basta lembrar que os números positivos são os números naturais. (§8) Logo, $(+15)-(+8) = 15-8 = 7 = +7$.

2.º *exemplo:* $(-4)-(+15)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número -4, contemos 15 segmentos para a esquerda e acharemos -19. Portanto, $-(4)-(+15) = -19$.

Para justificar êste resultado poderíamos dizer que, de acôrdo com o 1.º exemplo, subtrair um número positivo é contar para a esquerda. Mas é um resultado que causa extranheza aos estudantes; vamos justificá-lo de um modo muito simples.

Antônio é um menino que tem débitos e créditos. A sua situação financeira é a seguinte:

Débitos		Créditos	
Pedro...	3 cruzeiros (-3)	Artur...	5 cruzeiros $(+5)$
João....	4 cruzeiros (-4)	Raul....	6 cruzeiros $(+6)$
Luiz.....	11 cruzeiros (-11)	José....	15 cruzeiros $(+15)$
Carlos ..	8 cruzeiros (-8)	Flávio ..	2 cruzeiros $(+2)$
Décio...	16 cruzeiros (-16)	Omar....	10 cruzeiros $(+10)$
	42 cruzeiros (-42)		38 cruzeiros $(+38)$

Portanto, se Antônio proceder à liquidação de suas contas, ainda ficará devendo 4 cruzeiros. Acontece, porém, que, no dia em que Antônio resolve liquidar suas contas, morre José, sem deixar herdeiros, nem dinheiro. Logo, é necessário suprimir, eliminar, tirar, subtrair, da coluna dos créditos, a quantia de 15 cruzeiros. E Antônio, privado dos 15 cruzeiros que José lhe devia, fica devendo 19 cruzeiros em lugar de 4 cruzeiros. Da sua fortuna líquida de -4 cruzeiros (-4) foi preciso tirar, subtrair um crédito de 15 cruzeiros $(+15)$ e então Antônio ficou devendo 19 cruzeiros (-19). E eis por que $(-4)-(+15) = -19$.

3.º *exemplo:* $(+3)-(-5)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do segmento $+3$, contemos 5 segmentos *para a direita* e acharemos $+8$. Portanto, $(+3)-(-5) = +8$.

Se o resultado obtido no 2.º exemplo causa extranheza aos estudantes, êste deixa-os boquiabertos. Como? Pois o minuendo sendo 3, o resto pode ser 8?! Vamos então justificar êste resultado, como fizemos em relação ao 2.º exemplo. A situação financeira de Luiz é a seguinte:

Débitos		Créditos	
Fábio...	7 cruzeiros (-7)	Artur....	5 cruzeiros $(+5)$
Raul....	10 cruzeiros (-10)	José....	8 cruzeiros $(+8)$
Sílvio...	9 cruzeiros (-9)	Pedro...	9 cruzeiros $(+9)$
Décio...	5 cruzeiros (-5)	Carlos ..	12 cruzeiros $(+12)$
	31 cruzeiros (-31)		34 cruzeiros $(+34)$

Portanto, se Luiz proceder à liquidação de suas contas, ainda ficará com 3 cruzeiros. Acontece, porém, que Décio resolve perdoar a Luiz os 5 cruzeiros que lhe são devidos. Logo, é necessário suprimir, eliminar da coluna dos débitos, a quantia de 5 cruzeiros. E é claro que Luiz, ficando livre de seu débito para com Décio, ficará com 8 cruzeiros em lugar de 3 cruzeiros. Da sua fortuna líquida de 3 cruzeiros foi preciso subtrair um débito de 5 cruzeiros (-5), e Luiz ficou com 8 cruzeiros $(+8)$. E eis por que $(+3)-(-5) = +8$.

4.º *exemplo:* $(-7)-(-15)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do segmento -7, contemos 15 segmentos para a direita e acharemos $+8$. Portanto, $(-7)-(-15) = +8$.

5.º *exemplo:* $(-20)-(-13)$. Com o auxílio do gráfico C, e procedendo como ficou indicado em relação ao 3.º e 4.º exemplos, acharemos -7. Portanto, $(-20)-(-13) = -7$.

Em resumo:

$(+15) - (+8) = +7$ | $(-7) - (-15) = +8$

$(-4) - (+15) = -19$ | $(-20) - (-13) = -7$

$(+3) - (-5) = +8$ |

Em primeiro lugar observe-se que, no gráfico C, e como foi mostrado na justificação do resultado de cada exemplo,

a) *Subtrair um número positivo é contar para a esquerda.*

b) *Subtrair um número negativo é contar para a direita.*

Comparando estas conclusões com as conclusões a que chegámos no fim do parágrafo 12, resultam as duas novas conclusões seguintes:

a) *Subtrair um número positivo é o mesmo que somar um número negativo.*

b) *Subtrair um número negativo é o mesmo que somar um número positivo.*

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

> ***Regra.*** **Para subtrair de um número relativo, outro número também relativo, é bastante trocar o sinal do segundo e somá-lo ao primeiro.**

Exemplos

$$\begin{cases} (+15) - (+8) = (+15) + (-8) = +7 \\ (-4) - (+15) = (-4) + (-15) = -19 \\ (+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8 \\ (-7) - (-15) = (-7) + (+15) = +8 \\ (-20) - (-13) = (-20) + (+13) = -7 \end{cases}$$

Exercício. **Calcular a seguinte expressão:**

$$(+8) - (+7) + (-9) - (-10) + (-5) + (-8) - (-25)$$

Já aprendemos que, para subtrair um número relativo, é bastante trocar-lhe o sinal, e depois somá-lo em lugar de subtraí-lo. Tomamos então a expressão dada e substituímos o sinal que indica subtração pelo sinal que indica adição, *tendo, porém, o cuidado de trocar o sinal dos números relativos que devem ser subtraídos.* Teremos:

$$(+8) - (+7) + (-9) - (-10) + (-5) + (-8) - (-25) =$$
$$(+8) + (-7) + (-9) + (+10) + (-5) + (-8) + (+25)$$

E, de acôrdo com o exercício do parágrafo 15,

$$(+8) + (+10) + (+25) = (+43)$$
$$(-7) + (-9) + (-5) + (-8) = (-29)$$
$$(+43) + (-29) = (+14)$$

Portanto, o valor da expressão dada é $(+14)$.

Exercícios. Série II

1. $(+37)-(-15)+(-84)+(+28)-(-19)+(+17) =$

2. $(-37)-(-42)+(-85)+(+43)-(+77)-(-88)+(+55) =$

3. $(+54)+(-87)-(-86)-(+85)+(-82)-(-75) =$

4. $(-123)+(-458)-(-736)+(+528)-(-898)+(-1\,345) =$

5. $(+67)+(-84)-(+519)+(-817)-(-731)-(-774) =$

15. A soma de dois números simétricos é zero. Consideremos no gráfico C, os números $+7$ e -7. São dois números simétricos. (§ 10) A soma de dois números simétricos é zero. Com efeito, $(+7) + (-7) = 0$; $(+13) + (-13) = 0$; etc.. (§ 12) Dizemos *que a soma de dois números relativos iguais em valor absoluto, sendo um positivo e outro negativo, é nula.* Calculemos, por exemplo, a expressão seguinte:

$$(+5) - (+8) + (-10) - (-5) + (+11) + (-8) + (+10)$$

Em primeiro lugar é necessário transformar as subtrações em adições. Assim procedendo, teremos:

$$(+5) + (-8) + (-10) + (-5) + (+11) + (-8) + (+10)$$

Nesta expressão, o 1.º e o 4.º números são simétricos; logo, $(+5)+(-5) = 0$. O 3.º e o 7.º números são também simétricos; logo, $(-10) + (+10) = 0$. Suprimindo êstes quatro números da expressão dada, resulta:

$$(-8) + (+11) + (-8) = (-5)$$

Exercícios. Série III

Para calcular as expressões que se seguem, *o primeiro passo é transformar as subtrações em adições.* Em seguida, *suprimem-se os números simétricos.* Depois procede-se como ficou indicado no § 13.

1. $(+8)+(-15)+(-7)-(-8)+(+20)+(-8) =$
2. $(-37)-(-48)+(-59)+(+37)-(-54) =$
3. $(-36)+(-79)-(-79)+(+79)-(-84) =$
4. $(+615)+(-397)-(-858)+(-736)+(-615) =$
5. $(+43)+(-43)-(-75)-(+75)+(+512) =$

16. Simplificação da expressão $-(+10)$ ou $-(-10)$. O que significa $-(+10)$? Significa, simplesmente, que o número $+10$ deve ser diminuído de um outro número qualquer. Portanto, $-(+10) = +(-10) = (-10)$. (§ 14)

Do mesmo modo, $-(-10) = +(+10) = (+10)$

17. Expressões. Já vimos em que consiste uma expressão. Por exemplo, $7+8\times5-3\times4+18\div2$ é uma expressão; $(+8)-(+7) + (-5)-(-9)$ é também uma expressão. A primeira diferença notável entre as duas espécies de expressões é que a primeira é constituída exclusivamente por números inteiros, ao passo que a segunda é constituída por números relativos ou qualificados.

Consideremos a expressão seguinte:

$$(+7) + (-8) + (+12) + (-3) + (-5) + (+10) \qquad \text{(A)}$$

Nesta expressão está indicada a adição de seis números relativos. Entretanto, esta expressão tem uma forma algum tanto complicada, devido ao grande número de parênteses que ela contém. Nós vamos dar-lhe uma forma mais simples, *suprimindo todos os parênteses e o sinal mais, que está indicando a adição dos seis números relativos que a constituem.* Assim, a expressão (A) tomará a forma mais simples que se segue:

$$+7 - 8 + 12 - 3 - 5 + 10 \qquad \text{(B)}$$

E, quando o primeiro número relativo da expressão dada for um número positivo, nós suprimiremos o sinal *mais.*

Daquí por diante não fecharemos mais dentro de parênteses, os números relativos que devem ser somados. Mas é necessário que os estudantes se lembrem sempre que:

$7-8+9$ significa também $(+7)+(-8)+(+9)$
$-7-3-6+8$ significa também $(-7)+(-3)+(-6)+(+8)$
$5+7+8+9$ significa também $(+5)+(+7)+(+8)+(+9)$
$-2+3-5+6$ significa também $(-2)+(+3)+(-5)+(+6)$

Exercícios. Série IV

1. Dada a expressão $(-7)+(-8)+(-10)+(+12)+(+15)+(-18)$, suprimir todos os parênteses e depois calcular o valor da expressão.
2. Idem, para a expressão $(+8)+(-5)+(+7)+(-10)$.
3. Idem, para a expressão $(-11)+(+8)+(-15)+(+20)$.
4. Idem, para a expressão $(+8)-(-7)+(-10)-(-15)$.
5. Idem, para a expressão $(-2)-(-3)-(-4)-(-5)-(-6)$.
6. Idem, para a expressão $-(+5)+(-8)-(-12)+(+15)$.
7. Dada a expressão $7-3+5-6+8-9$, colocar cada número relativo entre parênteses, sendo cada parênteses precedido pelo sinal *mais.*
8. Dada a expressão $8-7-5+6+9+11-13$, colocar cada número relativo entre parênteses, sendo cada parênteses precedido pelo sinal *menos.*

18. Multiplicação de números relativos. Já vimos que, na multiplicação de números inteiros, o multiplicador é um número abstrato que indica quantas vêzes o multiplicando deve ser tomado como parcela. Nestas condições,

$$(+8) \times 3 = (+8) + (+8) + (+8) = (+24)$$
$$(-8) \times 3 = (-8) + (-8) + (-8) = (-24)$$

Consideremos agora as expressões $(+8) \times (-3)$ e $(-8) \times (-3)$. Desde que o multiplicador é um número abstrato, (-3) significa que os multiplicandos $(+8)$ e (-8) *devem ser subtraídos três vêzes.* Logo:

$$(+8)\times(-3) = -(+8)-(+8)-(+8) = (-8)+(-8)+(-8) = (-24)$$
$$(-8)\times(-3) = -(-8)-(-8)-(-8) = (+8)+(+8)+(+8) = (+24)$$

$(+8) \times (+3) = (+24)$
$(-8) \times (+3) = (-24)$
$(+8) \times (-3) = (-24)$
$(-8) \times (-3) = (+24)$

Examinando os quatro resultados ao lado concluímos que:

Regra. *O produto de dois números relativos,* **com o mesmo sinal,** *é um número positivo; o produto de dois números relativos,* **com sinais contrários,** *é um número negativo.*

19. Divisão de números relativos. A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números, determinar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. Logo, que,

$(+24) \div (+3) = (+8)$ porque $(+8) \times (+3) = (+24)$
$(-24) \div (+3) = (-8)$ porque $(-8) \times (+3) = (-24)$
$(+24) \div (-3) = (-8)$ porque $(-8) \times (-3) = (+24)$
$(-24) \div (-3) = (+8)$ porque $(+8) \times (-3) = (-24)$

Regra. *O quociente de dois números relativos,* **com o mesmo sinal,** *é um número positivo; o quociente de dois números relativos,* **com sinais contrários,** *é um número negativo.*

Exercícios. Série V

1. $(-8) \times (-5) \times (+12) \times (-1) \times (-20) = ?$ *Resp.* $(+9\,600)$
2. $(+36) \times (-14) \times (-63) \times (+5) \times (-5) \times (-45) = ?$ *Resp.* $(+35\,721\,000)$
3. $(-3) \times (-5) \times (-2) \times (-7) \times (-1) \times (+15) = ?$ *Resp.* $(-3\,150)$
4. $(-5) \times (+7) \times (-3) \times (+4) \times (-6) \times (+10) = ?$ *Resp.* $(-25\,200)$
5. $(-2) \times (+3) \times (-4) \times (-5) \times (+1) \times (-10) = ?$ *Resp.* $(+1\,200)$
6. $(-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6 = ?$ *Resp.* $(+42)$
7. $(-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + (-3)^5 = ?$ *Resp.* (-183)
8. $(-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)^3 = ?$ *Resp.* (-132)

9. $(-6)^2 + (-5)^3 + (-4)^4 + (-3)^5 + (-2)^6 = ?$ *Resp.* (-12)
10. $(-10)^3 + (-10)^2 + (-10)^1 + (+10)^3 = ?$ *Resp.* $(+90)$
11. $(-1)^1 - (-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 + (-1)^5 - (-1)^6 = ?$ *Resp.* (-6)
12. $(-2)^1 + (-2)^2 - (-2)^3 + (-2)^4 = ?$ *Resp.* $(+26)$
13. $(-3)^2 - (-3)^3 + (-3)^4 - (-3)^5 = ?$ *Resp.* $(+360)$
14. $(-2)^1 - (-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^5 = ?$ *Resp.* (-62)
15. $(-2)^1 - (-2)^2 - (-2)^3 - (-2)^4 - (-2)^5 - (-2)^6 = ?$ *Resp.* (-46)
16. $(+10) + (-3)(+5) - (+2)(+7) - (-5)(+8) + (-3)(-1)(-5) = ?$ *Resp.* $(+6)$
17. $(-30) + (-1)(+6) - (-3)(-5) + (-8)(+3) + (+2)(-3)(-4) = ?$ *Resp.* (-51)
18. $(-3)^2 + (-4)(-5) - (-2)^6 + (-1)(-5)(+10) = ?$ *Resp.* $(+15)$
19. $(-1)(-2)(-3)(+4) - (-1)^4 - (-5)(-6)(+2)(+1) - (-2)^5 = ?$ *Resp.* (-53)
20. $(-8)(+5) + (-3)^4 - (-3)^3 - (+5)(-1)(+3)(-2) = ?$ *Resp.* $(+38)$
21. $(-2)(-3)^2 + (-2)^4(+3) - (-5)^2(-1) + (-10)^2(+1) = ?$ *Resp.* $(+155)$
22. $(-10)^3 + (-3)^4(+2) + (-2)^5(-1) + (-2)^6(-3) = ?$ *Resp.* (-998)
23. $(-2)^2(-3)^3 - (-5)^2(-2)^4 - (-1)(-2)^3(-3)^3 + (-5)^4 = ?$ *Resp.* $(+333)$
24. $(-5)^2(-1) + (-2)^2(-3)^2(-4)^2 - (-1)^5(-2)^3(-3) = ?$ *Resp.* $(+575)$
25. $(-1)(-2)^2(-3)^2(-5) - (-5)^2(-4)(-3)^2(-2)^1 + 1000 = ?$ *Resp.* (-620)

20. Números fracionários relativos. A necessidade de calcular a diferença entre dois números inteiros **a** e **b**, no caso

particular em que **a** < **b**, nos levou a uma segunda ampliação do campo numérico: *a criação dos números negativos.* (*)

Tudo o que dissemos neste capítulo, em relação aos números inteiros se aplica, sem restrições, aos números fracionários com os quais podemos operar tal qual como fizemos com os números inteiros. Assim é que:

1. $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(+\frac{7}{5}\right)$
2. $\left(+\frac{11}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(+\frac{7}{5}\right)$
3. $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(+\frac{9}{5}\right)=\left(+\frac{7}{5}\right)$
4. $\left(-\frac{11}{5}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{7}{5}\right)$
5. $\left(+\frac{10}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)=\left(+\frac{3}{5}\right)$
6. $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{6}{5}\right)=\left(-\frac{9}{5}\right)$
7. $\left(+\frac{7}{5}\right)-\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(+\frac{3}{5}\right)$
8. $\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{9}{5}\right)=\left(+\frac{11}{5}\right)$

Exercícios. Série VI

1. $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{7}{5}\right)=$
2. $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{9}{16}\right)+\left(+\frac{25}{12}\right)=$
3. $\left(+\frac{9}{10}\right)-\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{11}{15}\right)-\left(+\frac{19}{20}\right)-\left(+3\frac{3}{4}\right)=$
4. $\left(+2\frac{1}{2}\right)-\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)-\left(-5\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{9}{10}\right)=$
5. $\left(+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(+\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{8}{9}\right)=$
6. $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(+\frac{9}{10}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{5}{8}\right)=$
7. $\left(+\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^5=$
8. $\left(-\frac{2}{5}\right)^4+\left(-\frac{3}{5}\right)=$

(*) A primeira ampliação do campo numérico consiste na criação dos números fracionários.

Capítulo II

Expressões Algébricas

21. Os símbolos algébricos. Os símbolos algébricos são os *sinais de operação, de relação e de quantidade.*

Comecemos pelos sinais de operação.

A adição é indicada pelo sinal $+$; $a+b$ significa que, ao número a, é necessário somar o número b.

A subtração é indicada pelo sinal $-$; $a-b$ significa que, do número a, é necessário subtrair o número b.

Não esqueçamos que o sinal $+$ e o sinal — raramente indicam a adição e a subtração; a função principal, quasi única, dêstes dois sinais é a de qualificar os números; lembremo-nos sempre de que $a+b$ e $a-b$ significam, respectivamente, $(+a)+(+b)$ e $(+a)+(-b)$. A diferença $a-b$ é a *soma* dos números $(+a)$ e $(-b)$.

A multiplicação é indicada pelo sinal $\times$ quando os fatores são *numéricos*, isto é, números. Quando os fatores são *literais*, isto é, letras, a multiplicação é indicada pela ligação destas mesmas letras; *ab*, *abc*, *abcd*, significam $a\times b$, $a\times b\times c$, $a\times b\times c\times d$. O mesmo acontece quando um dos fatores é numérico e os outros, literais: $5a$, $7ab$, $8xyz$ significam, respectivamente, $5\times a$, $7\times a\times b$, $8\times x\times y\times z$. Em lugar de $a\times 3$, $5\times b\times d$, $c\times 3\times d\times 4$, escreveremos $3a$, $5bd$, $12cd$.

A divisão é indicada de três maneiras diferentes: $a \div b$, $a:b$, $\frac{a}{b}$; preferem-se as duas últimas.

A potenciação e a radiciação são indicadas como em Aritmética, e os números que entram nestas duas operações têm os mesmos nomes: *base* e *expoente*, *radicando* e *índice*.

Consideremos o produto $5a$; é o mesmo que $5\times a$ ou $a\times 5$. Quando um produto contém um fator numérico, êste é colocado em primeiro lugar, e dá-se-lhe o nome de *coeficiente*.

A definição geral do coeficiente, aplicável em qualquer caso, é a seguinte:

Dado um produto constituído de fatores numéricos e literais, chama-se **coeficiente,** *o fator numérico dêste produto.* (*)

Assim, dados os produtos $5xy$, $\frac{3ab}{5}$, $ab\sqrt{2}$, $\frac{5xy\sqrt{2}}{4}$, seus coeficientes respectivos são 5, $\frac{3}{5}$, $\sqrt{2}$, $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

N. B. O coeficiente 1 é sempre omitido. Em lugar de $1a$ é bastante escrever a. Lembrando que o expoente 1 é sempre omitido e que o primeiro têrmo de uma expressão aritmética, não sendo precedido pelo sinal + ou —, é positivo, conclue-se que a forma completa do número a é $+1a^1$.

Os sinais que indicam relações entre duas quantidades a e b são diversos. Assim,

a = b *significa que* **a** *é igual a* **b**
a > b ,, ,, **a** *é maior que* **b**
a < b ,, ,, **a** *é menor que* **b**
a ≠ b ,, ,, **a** *é diferente de* **b**

Ainda existem outros sinais para indicar relações, e que serão conhecidos oportunamente.

Os sinais de quantidade são as *letras*. Estas representam quantidades conhecidas ou desconhecidas.

22. Expressão algébrica. Expressão algébrica é uma combinação de letras e números, ligados uns aos outros por sinais que indicam operações.

As expressões

$$2a - 3b + 5c - d \qquad 3ab + \sqrt{xy} - \frac{5abc}{3rs} + 7a^4$$

são expressões algébricas.

Consideremos a seguinte expressão algébrica:

$$5a - 3bc + 4a^2 - 5c^3 + 3d$$

(*) J. I. Almeida Lisboa, obra citada, págs. 104 e 105.
Aroldo Martini Zuccagni, *Tratado de Algebra elementar*, 1.º volume, 15.ª edição, 1938, pág. 69.

Suponhamos que $a=5$, $b=4$, $c=2$, $d=10$. Podemos então efetuar as operações indicadas nesta expressão. Substituindo as letras pelos valores numéricos que lhes foram atribuídos, teremos:

$$5 \times 5 - 3 \times 4 \times 2 + 4 \times 5^2 - 5 \times 2^3 + 3 \times 10$$

Ora, para calcular esta expressão, já sabemos qual a regra a seguir; em primeiro lugar, as operações de terceira espécie, depois as de segunda, e por último as de primeira. Isto eqüivale a dizer que, para calcular a expressão algébrica dada, é necessário calcular em primeiro lugar as expressões parciais, $+5a$, $-3bc$, $+4a^2$, $-5c^3$ e $+3d$ e, em seguida, efetuar as adições e subtrações.

Cada uma das expressões parciais $5a$, $-3bc$, $4a^2$, $-5c^3$ e $3d$ é chamada TÊRMO.

Têrmo *é uma expressão algébrica cujos elementos não estão separados pelo sinal* **mais ou menos.**

A expressão algébrica que tem sòmente um têrmo é chamada *monômio;* com dois têrmos é chamada *binômio;* com três, *trinômio;* em geral, tendo mais de um têrmo, é chamada *polinômio.*

Quando, em uma expressão algébrica monômia, não é mais possível efetuar operações ou simplificações, dizemos que êste monômio é *irredutível;* fica então constituído por um *fator numérico* e um ou mais *fatores literais*, dispostos em ordem alfabética. O fator numérico é, como já dissemos, o **coeficiente** *do monômio.* (§ 21)

Valor numérico de um polinômio é o valor que se obtém quando se substituem as letras por números e se efetuam as operações indicadas.

Um polinômio tem, em geral, uma infinidade de valores numéricos porque as letras podem ser substituídas por valores numéricos quaisquer.

Exercícios. Série VII

Supondo $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=6$, calcular o valor numéricos dos polinômios n.os 1 a 6.

1. $3a - 5b + 4c - 7d + 3e - 8f + 3$
2. $a + 2b + 3c - 4d - 5e - 5f - 7$
3. $8a + 7b - 4c - 9d + e - 15f + 5$
4. $5a - 7b + 8c - 9d - 6$
5. $3a + 5b - 7e - 8f - 7$
6. $2a + 11b - c - d + 8e - 10f - 8$

Sendo $x=2$, $y=3$, $z=5$, $a=4$, $b=6$, calcular o valor numérico dos polinômios n.os 7 a 10.

7. $4xy + 7az - 5bx + a$
8. $6ab - 3xy - 5xyz$
9. $4abx - 10ab - 7xyz$
10. $5xy + 4yz - 8az - 4ab$

Supondo $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{3}{4}$, $d=\frac{4}{5}$, calcular o valor numérico dos polinômios n.os 11 a 14.

11. $5a - 3b + 4c - 3d + \frac{3}{5}$
12. $3ab - 5bc + 2cd - 10ad$
13. $abc - abd - acd + bcd$
14. $3ad - 5ac + 7bd - 2ab - \frac{2}{5}$

Supondo $a=2$, $b=-3$, $c=4$, $d=-5$, calcular o valor numérico dos polinômios n.os 15 a 25.

15. $3a - 5b + 7c - 8d$.
16. $-4a + 5b - 3c + 6d$
17. $4ab - 3bc + 2bcd - 6ad$.
18. $5a+3b+4c+2d-ab-ac-ad-bd+15$
19. $5ab+3ac+4ad+2bd+5cd+7bc-16$
20. $abc+2abd+3bcd+2ad+3bc+4cd-10ac+20$
21. $a^3+b^3+c^3+d^3$
22. $a^2-b^4+c-d^2$
23. $3a^2-5b^2-4c^2-3d^2$
24. $-a^5+4b^3+5c^2-2d^3$
25. $-3a^2b+4ac^2-5b^2d^2+3abcd$

23. **Têrmos semelhantes.** *São os que têm as mesmas letras com os mesmos expoentes; os coeficientes e os sinais podem ser iguais ou diferentes.*

$$\begin{array}{cccc} +\ 5a^2 & +12x^2 & +3abc & -\ 7a^2b^2 \\ +\ 8a^2 & -\ \ 5x^2 & -8abc & -\ 8a^2b^2 \\ \hline +13a^2 & +\ \ 7x^2 & -5abc & -15a^2b^2 \end{array}$$

Dois têrmos semelhantes podem ser reduzidos a um só, como está indicado nos quatro exemplos acima. E' bastante operar com os coeficientes, aplicando as regras relativas aos números relativos.

Primeiro exemplo: $+5+8=+13$; $+5a^2+8a^2=+13a^2$

Segundo exemplo: $+12-5=+7$; $+12x^2-5x^2=+7x^2$

Terceiro exemplo: $+3-8=-5$; $+3abc-8abc=-5abc$

Quarto exemplo: $-7-8=-15$; $-7a^2b^2-8a^2b^2=-15a^2b^2$

Quando os coeficientes são fracionários, é conveniente fazer em separado as operações relativas aos mesmos.

$$+\frac{3ab}{4}-\frac{2ab}{3}+5ab-\frac{2ab}{5}-3ab+\frac{7ab}{8}-ab=?$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+5-\frac{2}{5}-3+\frac{7}{8}-1=\frac{187}{120}$$

Resposta. A expressão dada é igual a $+\frac{187ab}{120}$

N. B. Alguns autores separam o coeficiente fracionário, da parte literal, escrevendo $+\frac{2}{3}ab$, $-\frac{5}{6}x^2y$, $+\frac{3}{4}abc$, $-\frac{1}{2}mn$.

Os números mistos devem ser banidos do cálculo algébrico; em lugar de $3\frac{1}{2}ab$, $2\frac{3}{5}xy$, é mais simples escrever $\frac{7ab}{2}$, $\frac{13xy}{5}$.

Quando os têrmos semelhantes são numerosos, porém com coeficientes pequenos, a sua redução pode ser feita oralmente. Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$+3ab-5ab+ab-8ab+7ab+6ab-ab$$

E' constituída por 7 têrmos semelhantes; podemos então reduzí-la a um único têrmo, dizendo:

$$+3-5=-2;\quad -2+1=-1;\quad -1-8=-9;$$
$$-9+7=-2;\quad -2+6=+4;\quad +4-1=+3.$$

E a expressão dada se reduz a um único têrmo: $+3ab$.

Exercícios. Série VIII

Efetuar a redução dos têrmos semelhantes que se seguem:

1. $+\frac{3a}{5}+\frac{a}{8}$
2. $+5ab-\frac{3ab}{4}$
3. $-\frac{4abc}{9}+\frac{abc}{10}$
4. $-xyz+\frac{2xyz}{4}$
5. $+\frac{5a^2}{6}-\frac{3a^2}{4}$
6. $-7abc+\frac{abc}{10}$
7. $-3ab+\frac{2ab}{3}$
8. $+\frac{7a^2b}{4}-\frac{3a^2b}{5}$
9. $-\frac{b}{8}+\frac{5b}{6}$
10. $+\frac{xy}{4}-\frac{2xy}{5}$
11. $+\frac{5a^3}{8}-\frac{3a^3}{5}$
12. $-\frac{9mn}{10}+\frac{2mn}{5}$

13. $-xy + \frac{3xy}{4} + \frac{6xy}{5}$

14. $\frac{3xy}{4} - xy - 3xy - \frac{2xy}{5}$

15. $4a^2 - \frac{7a^2}{8} + \frac{9a^2}{10}$

16. $-abc + \frac{3abc}{4} - 4abc + \frac{7abc}{10}$

17. $+a^2b - \frac{3a^2b}{5} + 5a^2b - \frac{9a^2b}{8} + \frac{7a^2b}{10} - \frac{5a^2b}{12} - a^2b$

24. Ordenar um polinômio. Consideremos o polinômio

$$a^3 - 5a^7 + 6a - 8 + 9a^6 - 3a^2 - a^5 + 8a^4 \qquad \text{(A)}$$

Êste polinômio é constituído por oito têrmos que não permitem nenhuma simplificação ou redução; entretanto, êle pode ser *ordenado*, isto é, escrito do seguinte modo:

$$-5a^7 + 9a^6 - a^5 + 8a^4 + a^3 - 3a^2 + 6a - 8 \qquad \text{(B)}$$

Um polinômio é a soma algébrica de todos os seus têrmos. E, desde que a ordem das parcelas não influe no valor da soma, conclue-se que os polinômios A e B são iguais. Entretanto, há uma diferença notável entre ambos; no segundo, os expoentes da letra *a* se apresentam em ordem decrescente.

Ordenar um polinômio é escrever todos os seus têrmos em uma ordem tal que os expoentes de uma mesma letra se apresentem em ordem crescente ou decrescente.

A letra escolhida para ordenar o polinômio é chamada *letra ordenatriz*.

25. Classificação das expressões algébricas. (*) Uma expressão algébrica pode ser *racional* ou *irracional*.

Uma expressão algébrica é racional quando não contém nenhuma letra submetida a radical; é irracional quando contém letras sob radical. Consideremos as expressões algébricas seguintes:

$$3a^2b + 7ab^2 - bc \quad \text{e} \quad 5a^2b - 7a\sqrt{b}$$

A primeira é racional e a segunda é irracional.

Uma expressão algébrica com expoentes fracionários é irracional. Com efeito,

$$3a - 5b + 7c^{\frac{1}{2}} = 3a - 5b + 7\sqrt{c} \qquad (\S 40)$$

(*) Damos desde já esta classificação das expressões algébricas em obediência ao programa; entretanto, parece-nos preferível que tal assunto seja dado depois do §41 dêste compêndio.

Entretanto, a expressão algébrica .... $5x - 4\sqrt[3]{a^6b^9}$ é racional. Na verdade, ela contém letras sob radical; mas, considerando que $\sqrt[3]{a^6b^9} = a^2b^3$ (§ 34), resulta que:

$$5x - 4\sqrt[3]{a^6b^9} = 5x - 4a^2b^3$$

Observação. O polinômio $5m - a\sqrt{2}$ é *racional* porque um polinômio é *irracional* quando contém *letras* sob radical.

Uma expressão algébrica e racional *pode ser inteira ou fracionária.*

E' inteira quando seus expoentes são números inteiros e positivos; quando não tem letras em denominador ou, se as tem, seus expoentes são números inteiros e **negativos.** (§39) Portanto, os polinômios racionais

$$(1) \quad 3x^3 + 4xy \qquad (2) \quad 5a^2b - 7ab^2 + \frac{5c}{6}$$

$$(3) \quad \frac{5}{a^{-3}} + 7a^2b - \frac{6a}{c^{-3}} \quad \therefore \quad 5a^3 + 7^2ab - 6ac^3$$

são polinômios inteiros.

Observação. O polinômio (2) é inteiro porque não tem letras em denominador; a natureza dos coeficientes numéricos **não** influe na classificação.

Uma expressão algébrica e racional *é fracionária, quando tem expoentes inteiros e negativos;* (§39) *quando tem letras em denominador, com expoentes inteiros e* **positivos.** Portanto, os polinômios racionais

$$(4) \quad \frac{3ab}{c^2} - \frac{5a^2}{7} \qquad (5) \quad \frac{5x}{4} - \frac{3x^2}{y^3}$$

$$(6) \quad \frac{5ab^{-3}}{7} + \frac{3a^{-2}b}{8} \quad \therefore \quad \frac{5a}{7b^3} + \frac{3b}{8a^2} \qquad (\S 39)$$

são polinômios fracionários.

Um polinômio pode ser *inteiro* em relação a uma letra, e *fracionário* em relação a uma outra. Por exemplo, o polinômio

$$\frac{3a}{c} + \frac{5b}{7} - \frac{3x}{5y}$$

é fracionário de um modo geral; é inteiro em relação às letras a, b, x; é fracionário em relação às letras c e y.

Observação. *São as expressões algébricas* **racionais** *que podem ser inteiras ou fracionárias.* Uma expressão irracional não é, *de um modo geral,* nem inteira, nem fracionária.

Entretanto, pode ser inteira ou fracionária em relação a uma ou algumas das letras que nela figuram.

Já aprendemos (§ 24) a ordenar um polinômio racional e inteiro. Um polinômio pode ser *completo* ou *incompleto.* E' completo quando contém todas as potências da letra ordenatriz, desde a mais alta até a mais baixa, isto é, até a *potência zero.* (§ 38) Por exemplo, o polinômio

$$5a^6 - 7a^5b + 4a^4b^2 - 3a^3b^3 + 3a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

que também se pode escrever

$$5a^6b^0 - 7a^5b^1 + 4a^4b^2 - 3a^3b^3 + 3a^2b^4 - 6a^1b^5 + a^0b^6$$

é completo em relação à letra a porque, a partir de a^6, êle contém todas as potências de a, inferiores à sexta potência, inclusive a potência zero, isto é, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1 e a^0. O polinômio dado é também completo em relação à letra b, pelas mesmas razões.

Entretanto, os polinômios

$$5a^4 - 7a^3b + 4ab^3 + 5b^4 \quad \text{e} \quad 5a^3 - 7a^2b$$

são incompletos, porque o primeiro não contém a segunda potência de a, e o segundo não contém a primeira potência e a potência zero de a.

CAPÍTULO III

Operações Algébricas

26. Adição algébrica. Consideremos a expressão algebrica seguinte:

$$(3a+b) + (-5a+7b) + (8a-6b) + (-a-8b) + (-3a-b) \quad \text{(A)}$$

Nesta expressão está indicada a adição de cinco binômios. O sinal + que liga os cinco binômios indica a adição; no binômio $3a+b$, o têrmo $3a$ é positivo; no binômio $8a-6b$, o têrmo $8a$ é também positivo. Isto pôsto, eliminando os parênteses (E.M.P.V. § 84), resulta:

$$3a + b - 5a + 7b + 8a - 6b - a - 8b - 3a - b$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, teremos $2a-7b$.

E é nisto que consiste a adição dos polinômios.

Regra. *Para efetuar uma adição algébrica, escrevem-se os polinômios dados, uns em continuação aos outros,* **cada têrmo com o seu sinal,** *e reduzem-se os têrmos semelhantes.*

Exemplos

1. $(5a+b)+(-3a+2c)+(3b+5)+(-5c+3a) =$
$5a+b-3a+2c+3b+5-5c+3a = 5a+4b-3c+5$

2. $(3a-2b+5c-6d)+(-4a+2b-5c-7d+e) =$
$3a-2b+5c-6d-4a+2b-5c-7d+e = -a-13d+e$

Vamos calcular o valor numérico da expressão (A), fazendo $a=1$ e $b=2$. Teremos:

$$(3\times1+2)+(-5\times1+7\times2)+(8\times1-6\times2)+(-1-8\times2)+(-3\times1-2) =$$
$$(3+2)+(-5+14)+(8-12)+(-1-16)+(-3-2) =$$
$$5+9-4-17-5 = 14-26 = -12$$

Calculando o valor numérico da soma, $2a-7b$, teremos:

$$2a - 7b = 2 \times 1 - 7 \times 2 = 2 - 14 = -12$$

Portanto, o valor numérico da soma é igual à soma dos valores numéricos das parcelas, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números, na soma e nas parcelas.

A adição algébrica é a operação que tem por fim, dados dois ou mais polinômios chamados **parcelas,** *formar um polinômio chamado* **soma,** *cujo valor numérico seja sempre igual à soma dos valores numéricos das parcelas, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números (ou valores), aliás quaisquer, na soma e nas parcelas.*

Às vêzes, quando os polinômios são muitos, é conveniente dar à adição algébrica uma disposição semelhante à da adição aritmética.

$$(5a^3-7a^2b+8ab^2-b^3+5)+(8a^2b-5ab^2-9)+(7-8b^3-9a^3)+$$
$$(+6b^3+4-ab^2+a^2b-4a^3)+(6a^3-11ab^2-3b^3-1)+(4a^2b+4b^3+10)=$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & +5a^3 & -7a^2b & +8ab^2 & -b^3 & +5 \\
 & & +8a^2b & -5ab^2 & & -9 \\
 & -9a^3 & & & -8b^3 & +7 \\
 & -4a^3 & +a^2b & -ab^2 & +6b^3 & +4 \\
 & +6a^3 & & -11ab^2 & -3b^3 & -1 \\
 & & +4a^2b & & +4b^3 & +10 \\
\hline
\textit{Soma} = & -2a^3 & +6a^2b & -9ab^2 & -2b^3 & +16
\end{array}$$

Escrevem-se os polinômios parcelas uns por baixo dos outros, de modo que os têrmos semelhantes se correspondam em linhas verticais; em seguida, faz-se a redução dos têrmos semelhantes. Esta disposição não é necessária, mas é conveniente para evitar enganos.

Exercícios. Calcular o valor numérico de cada um dêstes seis polinômios e do polinômio soma, fazendo $a=1$ e $b=2$, e verificar mais uma vez que o valor numérico do polinômio soma é igual à soma dos valores numéricos dos polinômios parcelas.

Exercícios. Série IX

N. B. É conveniente dar à adição algébrica uma disposição semelhante à da aritmética.

1. $(3a-5b+7c)+(6b-7a+10c)+(-9a+11b-20c)+(c-b-a)=$
2. $(4a^2-5b^2+7c^2-8)+(15-6c^2+9b^2-3a^2)+(8a^2+c^2-9)+$ $+(7b^2-15c^2+11)+(3a^2-12b^2+12)+(a^2+b^2+c^2)+(-20)=$
3. $(a^2+b)+(a+b^2)+(3a^2-5b^2)+(5a-7b)+(4a^2-9a+5)+$ $+(8b^2-11b-6)+(-3a^2+6b^2-7a-8b-15)=$
4. $(ab+ac)+(ab+bc)+(3ab-3ac-5bc)+(-5ab-5ac)+(-ab$ $-2bc)+(-3ab+5bc-7ac-8)=$

5. $(2a-3b+5y-8)+(-3a+3b+2x+7)+(-2-3x-4y-5b-$ $6a)+(5a-6x+8b-11y+20)=$
6. $(7a^3-5a^2b+8ab^2-9b^3+10)+(-6a^3+6a^2b-9ab^2+10b^3-10)+$ $+(5b^3-8ab^2+7a^2b-10a^3)+(-6a^3-8a^2b+9ab^2-6b^3+1)=$

27. Subtração algébrica. Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$(3a-5b+7c)-(2a-7b+8c+7) \qquad \text{(B)}$$

Esta expressão significa que, do polinômio $3a-5b+7c$ é necessário subtrair o polinômio $2a-7b+8c+7$. O sinal $-$ que liga os dois polinômios está indicando a subtração que se deve efetuar; o primeiro têrmo de cada polinômio é positivo.

Isto pôsto, e eliminando os parênteses (E.M.P.V. § 84), resulta;

$$3a-5b+7c-2a+7b-8c-7$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, teremos: $a+2b-c-7$. E é nisto que consiste a subtração algébrica.

Regra. *Para efetuar uma subtração algébrica, escreve-se o subtraendo depois do minuendo,* **tendo, porém, o cuidado de trocar os sinais dos têrmos do subtraendo;** *em seguida, reduzem-se os têrmos semelhantes.*

Exemplos

1. $(5a+3b-c)-(2a+5b-3c)=5a+3b-c-2a-5b+3c=$ $=3a-2b+2c$
2. $(-7x+4y-a)-(-8x+5y-b)=-7x+4y-a+8x-5y+b=$ $=x-y-a+b$

Calculemos o valor numérico da expressão B, fazendo $a=1$, $b=2$ e $c=3$. Teremos:

$$(3\times1-5\times2+7\times3)-(2\times1-7\times2+8\times3+7)=$$
$$(3-10+21)-(2-14+24+7)=$$
$$14-19=-5$$

Calculando o valor numérico do resto $a+2b-c-7$ teremos: $a+2b-c-7=1+2\times2-3-7=1+4-3-7=-5$

Portanto, o valor numérico do resto é igual à diferença entre os valores numéricos do minuendo e do subtraendo, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números, nos três polinômios.

A subtração algébrica é a operação que tem por fim, dados dois polinômios chamados, respectivamente, **minuendo** *e* **subtraendo,**

formar um terceiro polinômio chamado **resto**, *cujo valor numérico seja sempre igual à diferença entre os valores numéricos dos dois polinômios dados, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números (ou valores), aliás quaisquer, nos três polinômios.*

Exercícios. Série X

1. $(3a-5b+7c-2d+9) - (5a-11b+8c+3d+10) =$
2. $(5a^2-8b^2+9c^2-10d^2+5e) - (-7a^2+9b^2-10d^2+8) =$
3. $(a+b+c+d+e+f) - (-a-b-c-d-e-f) =$
4. $(8ab-3ac+9ad-5af) - (5ab-7ac+11ad-8af) =$
5. $(7ax-9ay+11az-7) - (5ab-9ac+8ad-8) =$
6. $(5a-5b+6c-7d+8) - (5m+5n+6r-7s+8)$
7. $(8a^3-7a^2+9a-5) - (-7+11a-8a^2+5a^3) =$
8. $(2a-3b+5c-6d+7e-10) - (15+8e-10d+9c-7b+a) =$
9. $(-11a-12b-13c-14d-15e) - (-14a-15b-16c-17d-20e) =$
10. $(-3abc+7abd-8abe+15) - (-7abc+10abd-5abe+20) =$
11. $-(3a-5b)+(-7c-2a) - (6a+b-c) - (-3c+a+10b) =$
12. $-(2a-3b+c)+(5a-6b+7c) - (a-b-c)+2a-2b+3c) =$
13. $(x+y) - (-2x+3y)+(5x-7) - (-8+3y)-(x-y-10) =$
14. $3a - \left[5a-(7b+3c)+10b\right] - \left[-(2a-5c)+7b\right] =$

N. B. Em primeiro lugar eliminam-se os parênteses; depois reduzem-se os têrmos semelhantes entre os colchetes; por último eliminam-se os colchetes.

15. $-5a+\left[(2a-b) - (3b+5a)\right] - \left[9c-(4a-3b+2c) - (-10a)\right] =$
16. $x-\left\{3x-\left[2x-(5+7x-a)+3a\right]-(2a-8)\right\} =$

N. B. Procede-se como no exercicio 14, eliminando as chaves em ultimo lugar.

17. $(5a-3b)-\left[b-(6a+8b)\right] - \left\{\left[7a-(b-a)+5\right] - (3a-3b)\right\} =$
18. Sendo $A=a+b+c$, $B=c-a+b$, $C=c-b+a$, $D=c-a-b$, calcular $A-B+C-D$, $(A+B)-(C+D)$, $(A-B)-(C-D)$.

28. Potência de um número. Já vimos em que consiste uma potência qualquer de um número. (E.M.P.V. §86)

Aprendemos também os principais teoremas relativos à potenciação, entre os quais devemos lembrar o primeiro, a saber:

O produto de duas potências com a mesma base, e com expoentes iguais ou diferentes, é uma potência cuja base é a mesma das duas potências dadas, e cujo expoente é a soma dos expoentes das duas bases dadas. Abreviadamente diremos:

Para multiplicar duas potências com a mesma base, é bastante somar os expoentes. (E.M.S.V. §43)

Por exemplo, $2^5 \times 2^3 = 2^8$. E, de um modo geral,

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Êste teorema se estende facilmente ao caso de três ou mais potências. Por exemplo:

$$a^2 \times a^3 \times a^4 = a^5 \times a^4 = a^9$$

$$x^3 \times x^4 \times x^5 \times x^6 = x^{12} \times x^6 = x^{18}$$

E assim por diante.

Podemos pois estabelecer de um modo geral que:

$$\boxed{a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \ldots\ldots = a^{m+n+p+q+\ldots\ldots}}$$

29. Multiplicação de monômios. Examinemos alguns exemplos.

I. $4a \times 5b$.

Já sabemos que $4a$ significa $4\times a$ e $5b$, $5\times b$ (§21). Portanto,

$$4a \times 5b = (4\times a) \times (5\times b)$$

Em virtude da lei associativa da multiplicação (E.M.P.V. §72, III), podemos escrever:

$$4a \times 5b = 4 \times a \times 5 \times b$$

Lembrando a lei comutativa da multiplicação (E.M.P.V. §72, I), teremos:

$$4a \times 5b = 4 \times 5 \times a \times b$$

Voltando à lei associativa da multiplicação.......

$$4a \times 5b = 20 \times ab$$

E, finalmente, (§24)

$$4a \times 5b = 20ab$$

II. $4c \times 3c = 4 \times c \times 3 \times c$
$= 4 \times 3 \times c \times c$
$= 12 \times c^2$
$= 12c^2$ (*)

(*) Deixamos aos estudantes o prazer de justificarem estas transformações.

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} 4a^2 \times 5b^2 &= 4 \times a^2 \times 5 \times b^2 \\ &= 4 \times 5 \times a^2 \times b^2 \\ &= 20 \times a^2 \times b^2 \\ &= 20a^2b^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{aligned} 3a^2b \times 5ab^2c &= 3 \times a^2 \times b \times 5 \times a \times b^2 \times c \\ &= 3 \times 5 \times a^2 \times a \times b \times b^2 \times c \\ &= 15 \times a^3 \times b^3 \times c \\ &= 15a^3b^3c \qquad (*) \end{aligned}$$

Examinando os quatro resultados concluímos que:

Regra. *Para multiplicar dois monômios quaisquer, multiplicam-se os coeficientes e, à direita dêste produto, escrevem-se as letras que entram nos dois monômios, dando a cada letra no produto, um expoente igual à soma dos expoentes desta mesma letra em cada fator. Sendo os coeficientes números relativos, é necessário atender à regra dos sinais.* (§ 18)

Exemplos

1. $5a^3 \times 6a^2 = 30a^5$
2. $(-7x^2y)(-5xy^2) = 35x^3y^3$
3. $(-5a^2b^2) \times 3ab^2 = -15a^3b^4$
4. $7ab \times (-4a) = -28a^2b$
5. $(-a^5b) \times 3ab^2 = -3a^6b^3$
6. $(-8ab)(-1) = 8ab$

Exercícios. Série XI

1. $\dfrac{3a^2b}{4} \times 5ab^2 \times \dfrac{a^2b^2}{2} \times \dfrac{2ab}{3} =$

2. $\dfrac{5a^2c}{8} \times \dfrac{3abc}{4} \times \dfrac{5a^3b^2}{6} \times \dfrac{a^2b^2c^2}{5} =$

3. $4xy \times \left(-\dfrac{x^3}{5}\right)\left(-\dfrac{4x^2}{7}\right)\left(-\dfrac{14xy^3}{15}\right) =$

4. $\left(-5b^3m\right)\left(-\dfrac{7bm^2}{10}\right)\left(-\dfrac{2m}{7}\right)\left(-1\right) =$

5. No primeiro exercício, fazendo $a=2$ e $b=1$, calcular o valor numérico de cada monômio fator e do produto e verificar que o valor numérico do produto é igual ao produto dos valores numéricos dos fatores.

6. Mesmo exercício em relação ao n.º 2, fazendo $a=1$, $b=2$ e $c=3$.

7. Mesmo exercício em relação ao n.º 3, fazendo $x=2$ e $y=1$.

8. Mesmo exercício em relação ao n.º 4, fazendo $b=3$ e $m=2$.

30. Multiplicação de um polinômio por um monômio. Já aprendemos a propriedade distributiva da multiplicação.

(E.M.P.V. § 72, IV) Ela nos ensina que, *para multiplicar uma soma por um número, multiplica-se cada uma das parcelas por êste número e, em seguida, somam-se os produtos parciais obtidos.* Por exemplo,

$$(7 + 4 + 5) \times 3 = 7 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 3$$

Podemos, pois, escrever de um modo geral que:

$$\boxed{(a + b + c + \ldots\ldots) \times m = am + bm + cm + \ldots\ldots}$$

E resulta assim a seguinte

Regra. *Para multiplicar um polinômio por um monômio, multiplica-se cada têrmo do polinômio pelo monômio e somam-se os produtos parciais.*

Exemplos

1. $(3a^2 - 5ab + b^2)7ab = 21a^3b - 35a^2b^2 + 7ab^3$
2. $(-5x^2 + 7xy - 9y^2)(-4xy) = 20x^3y - 28x^2y^2 + 36xy^3$
3. $(7ab - 5bc + 8d)(-1) = -7ab + 5bc - 8d$
4. $(-5x^3 - 8x^2 + 9x)(-2) = 10x^3 + 16x^2 - 18x$

Exercícios. Série XII

1. $(2a - 3b + 4c - 5d) \times 5x =$
2. Fazendo $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ e $x=5$, verificar no exercício anterior que o valor numérico do produto é igual ao produto dos valores numéricos dos dois fatores.
3. $(a^3 - a^2 + a - 5)(-5ab) =$
4. $(5a^2 - 7b + 8c - d) \times 4ab =$
5. $(7a^3 - 5a^2b + 8ab^2 - 9b^3)(-2ab) =$
6. $(ac - 3ad + 4ae - 5af) \times 8adef =$
7. $(-8)(x^3 - x^2 + x - 5) =$
8. $(-3ab)(a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 8b^3) =$
9. $\left(\dfrac{3a^3}{4} - \dfrac{5a^2b}{6} + \dfrac{ab^2}{3} - \dfrac{2b^3}{5}\right)\left(-12a^3b^2\right) =$
10. $(-1)(a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1)(-1) =$
11. $7(4a - b) + 5(3a - 2b) - 4(5a - b) - 6(a - 3b) =$
12. $(5a^2 - 7ab + 8b^2)(-ab) - (6a^2 - 3ab + 5b^2)(-2ab) =$
13. $(5a - 7b + 3c + 2)(-1) + (a - 2b - 3c - 4d)(-2) - (-a + b + c + d)(-3) =$
14. $3a(2b - 5c) + 5b(3a - 4c) - (4a - 3b)6c =$

Solução. $(6ab - 15ac) + (15ab - 20bc) - (24ac - 18bc) =$
$6ab - 15ac + 15ab - 20bc - 24ac + 18bc = 21ab - 39ac - 2bc$

15. $a(3b-4c+8d)-2a(6d-7c+3b)-3a(-4b-d+6c)=$
16. $5ab-7b(3a-2c)+4c(3b+2a)-5a(-6b-c-7)=$
17. $-2a(5b-x)-3a(5c-4)+4b(-3a-2)+(-2ax+11ac-11a)=$

31. Multiplicação de dois polinômios. Consideremos o seguinte exemplo:

$$(a+b+c)(m+n)$$

Considerando como efetuadas as operações indicadas dentro dos primeiros parênteses (E.M.P.V. § 83) teremos:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(m+n) &= (a+b+c)m+(a+b+c)n\\ &= (am+bm+cm)+(an+bn+cn) \quad (\S 30)\\ &= am+bm+cm+an+bn+cn\end{aligned}$$

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. *Para multiplicar dois polinômios, multiplica-se cada têrmo do primeiro por cada têrmo do segundo e somam-se os produtos parciais.*

Observação. De acôrdo com esta regra, se multiplicarmos um polinômio com m têrmos por um outro com n têrmos, o produto terá $m+n$ têrmos. Entretanto, o número de têrmos do produto é geralmente inferior a $m+n$, sendo no mínimo igual a *dois*. (§ 46)

Exemplos

1. $(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$

$$\begin{array}{rrrr}
\multicolumn{4}{l}{a^2-2ab+b^2}\\
\multicolumn{4}{l}{a-b}\\ \hline
a^3 & -2a^2b & +ab^2 & \\
 & -a^2b & +2ab^2 & -b^3\\ \hline
a^3 & -3a^2b & +3ab^2 & -b^3
\end{array}$$

Escrevem-se os dois polinômios como está indicado ao lado. Multiplica-se cada têrmo do multiplicando pelo primeiro têrmo do multiplicador, isto é, efetuam-se os produtos $a^2\times a$, $(-2ab)\times a$ e $b^2\times a$; depois multiplica-se cada têrmo do multiplicando pelo segundo têrmo do multiplicador, isto é, efetuam-se os produtos $a^2\times(-b)$, $(-2ab)(-b)$ e $b^2\times(-b)$. Finalmente, somam-se os produtos parciais $a^3-2a^2b+ab^2$ e $-a^2b+2ab^2-b^3$.

2. $(a^3-a^2+a-5)(a^2+a-3)=$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{l}{a^3-a^2+a-5}\\
\multicolumn{6}{l}{a^2+a-3}\\ \hline
a^5 & -a^4 & +a^3 & -5a^2 & & \\
 & +a^4 & -a^3 & +a^2 & -5a & \\
 & & -3a^3 & +3a^2 & -3a & +15\\ \hline
a^5 & & -3a^3 & -a^2 & -8a & +15
\end{array}$$

No segundo exemplo temos três produtos parciais resultantes das três multiplicações seguintes:

$$(a^3-a^2+a-5)a^2$$
$$(a^3-a^2+a-5)a$$
$$(a^3-a^2+a-5)(-3)$$

3. $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)=$

$$\begin{array}{rrrrr}
\multicolumn{5}{l}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\\
\multicolumn{5}{l}{a-b}\\ \hline
a^4 & +a^3b & +a^2b^2 & +ab^3 & \\
 & -a^3b & -a^2b^2 & -ab^3 & -b^4\\ \hline
a^4 & & & & -b^4
\end{array}$$

No terceiro exemplo, se o multiplicando tem 4 têrmos e o multiplicador tem 2, o produto deveria ter 8; entretanto há no 3.º exemplo numerosos têrmos simétricos, e o produto se reduz a dois têrmos apenas, isto é, ao binômio a^4-b^4.

4. $(5x^2+2-3x+4x^3)(-2x+5+3x^2)=$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{l}{4x^3+5x^2-3x+2}\\
\multicolumn{6}{l}{3x^2-2x+5}\\ \hline
12x^5 & +15x^4 & -9x^3 & +6x^2 & & \\
 & -8x^4 & -10x^3 & +6x^2 & -4x & \\
 & & +20x^3 & +25x^2 & -15x & +10\\ \hline
12x^5 & +7x^4 & +x^3 & +37x^2 & -19x & +10
\end{array}$$

No quarto exemplo, os dois polinômios estão ordenados segundo as potências decrescentes da letra x. (§ 24)

Quando os polinômios que se vão multiplicar são incompletos, (§ 25) convém dispor os produtos parciais de um modo especial, para facilitar a redução dos têrmos semelhantes. E' preferível tomar como multiplicando, o polinômio que tem maior número de têrmos.

5. $(x^5+x-x^3-6)(x^4-x^3+x^2-x+7)=$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\multicolumn{10}{l}{x^4-x^3+x^2-x+7}\\
\multicolumn{10}{l}{x^5-x^3+x-6}\\ \hline
x^9 & -x^8 & +x^7 & -x^6 & +7x^5 & & & & & \\
 & & -x^7 & +x^6 & -x^5 & +x^4 & -7x^3 & & & \\
 & & & & +x^5 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & +7x & \\
 & & & & & -6x^4 & +6x^3 & -6x^2 & +6x & -42\\ \hline
x^9 & -x^8 & & & +7x^5 & -6x^4 & & -7x^2 & +13x & -42
\end{array}$$

6. $(2x^4-3x^3+x-1)(x+2)=$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{l}{2x^4-3x^3+x-1}\\
\multicolumn{6}{l}{x+2}\\ \hline
2x^5 & -3x^4 & & +x^2 & -x & \\
 & +4x^4 & -6x^3 & & +2x & -2\\ \hline
2x^5 & +x^4 & -6x^3 & +x^2 & +x & -2
\end{array}$$

7. $(x^4 - 3x^2 + 2x + 1)(x^3 - 2x - 2)$

$$
\begin{array}{lllllll}
x^4 & -3x^2 & +2x & +1 & & & \\
x^3 & -2x & -2 & & & & \\
\hline
x^7 & -3x^5 & +2x^4 & +x^3 & & & \\
 & -2x^5 & & +6x^3 & -4x^2 & -2x & \\
 & & -2x^4 & & +6x^2 & -4x & -2 \\
\hline
x^7 & -5x^5 & & +7x^3 & +2x^2 & -6x & -2
\end{array}
$$

8. $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)(a + b + c) =$

$$
\begin{array}{llllllllll}
a^2 & -ab & -ac & +b^2 & -bc & +c^2 & & & & \\
a & +b & +c & & & & & & & \\
\hline
a^3 & -a^2b & -a^2c & +ab^2 & -abc & +ac^2 & & & & \\
 & +a^2b & & -ab^2 & -abc & & +b^3 & -b^2c & +bc^2 & \\
 & & +a^2c & & -abc & -ac^2 & & +b^2c & -bc^2 & +c^3 \\
\hline
a^3 & & & & -3abc & & +b^3 & & & +c^3
\end{array}
$$

Observação. Neste exemplo ordena-se o multiplicando de acôrdo com as potências decrescentes de a; em seguida, ordenam-se os têrmos restantes de acôrdo com as potências decrescentes de b.

Voltemos ao primeiro exemplo. Se fizermos $a=3$ e $b=1$, nos polinômios fatores e no polinômio produto, verificaremos que o valor numérico do produto é igual ao produto dos valores numéricos dos fatores. O mesmo acontecerá no segundo exemplo, se fizermos $a=10$, e no terceiro, fazendo $a=5$ e $b=2$. (Os estudantes devem fazer estas verificações.) Podemos, pois, estabelecer que:

A multiplicação algébrica é a operação que tem por fim, dados dois polinômios chamados respectivamente **multiplicando** *e* **multiplicador,** *formar um terceiro polinômio chamado* **produto,** *cujo valor numérico seja sempre igual ao produto dos valores numéricos dos dois fatores, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números, (ou valores) aliás quaisquer, nos três polinômios.*

Exercícios. Série XIII

1. $(a^4 - 3a^3 + 7a^2 - 5a + 8)(a^2 - 4a + 5) =$
2. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)(a^2 - 2ab + b^2) =$
3. $(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) =$
4. $(5a^2b + 7ab + 8b)(7a^3b + 6a^2b - 5ab - 8b) =$

5. $(5a - 6a^2 + 10 + 4a^3)(5a^2 + a^3 - 5a + 7) =$
6. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) =$
7. $(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x - 2) =$
8. $\left(\frac{2a^3}{3} - \frac{a^2}{4} + \frac{2a}{5} - \frac{3}{4}\right)\left(a^2 - \frac{3a}{4} + \frac{1}{2}\right) =$
9. $(a+b+c)^2 =$
10. $(x-y+z-u)^2 =$
11. $(a+2b+3c)^2 =$
12. $(2a-5b+3c)^2 =$
13. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\right)^2 =$
14. $\left(\frac{x}{3} - \frac{2y}{5}\right)^2 =$
15. $(a^2 - 3a + 7)(a - 5) - (a^3 - 5a^2 + 7a - 8)(3a + 1) =$
16. $(5x + 4x^2 + x^3 - 24)(x^2 + 11 - 4x)$
17. $(x^3 + 11x - 4x^2 - 24)(x^2 + 5 + 4x)$
18. $(x^4 + x^2 - 4x - 11 + 2x^3)(x^2 - 2x + 3)$
19. $(a+5)(-3+a)(a-2)(-2+a)$
20. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

32. Fórmulas de multiplicação; identidades. Algumas vêzes, o produto de duas expressões algébricas, particularmente o de dois binômios, pode ser obtido sem efetuar a multiplicação das mesmas. Chega-se a êste resultado pelo conhecimento de algumas fórmulas que vamos aprender.

I. Calculemos a expressão $(a + b)^2$, isto é, $(a + b)(a + b)$. Efetuando-se a multiplicação indicada, resulta $a^2 + 2ab + b^2$.

$$
\begin{array}{lll}
a & +b & \\
a & +b & \\
\hline
a^2 & +ab & \\
 & +ab & +b^2 \\
\hline
a^2 & +2ab & +b^2
\end{array}
$$

[*Primeira fórmula*]

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{2ab} + \mathbf{b}^2$$

O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais o duplo produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Exercícios orais

Calcular mentalmente as expressões seguintes:

1. $(x + y)^2$	3. $(c + d)^2$	5. $(e + f)^2$	7. $(a + 3)^2$
2. $(m + n)^2$	4. $(r + s)^2$	6. $(t + u)^2$	8. $(b + 5)^2$

9. $(c+4)^2$	16. $(5r+2s)^2$	23. $(a^2b+bc^2)^2$
10. $(r+1)^2$	17. $(5e+f)^2$	24. $(abc+4)^2$
11. $(s+10)^2$	18. $(5a^2+7b^2)^2$	25. $(a^2b^2+a^2x)^2$
12. $(t+7)^2$	19. $(3m^4+5n^3)^2$	26. $(3a+2bc)^2$
13. $(2a+3b)^2$	20. $(8r^2+2s)^2$	27. $(5+7abc)^2$
14. $(5m+3n)^2$	21. $(4x^3+5y^2)^2$	28. $(3xy+8a^2)^2$
15. $(4c+3d)^2$	22. $(5ab+3)^2$	

II. Calculemos a expressão algébrica $(a-b)^2$, isto é, $(a-b)(a-b)$. Efetuando-se a multiplicação indicada, resulta $a^2-2ab+b^2$.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad\; - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

[*Segunda fórmula*]

$$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos o duplo produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Exercícios orais

Repetir os exercícios relativos à primeira fórmula, trocando o sinal *mais* pelo sinal *menos*.

III. Calculemos a expressão algébrica $(a+b)(a-b)$. Efetuando-se a multiplicação indicada, resulta a^2-b^2.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad\; - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad\;\; - b^2 \end{array}$$

[*Terceira fórmula*]

$$\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

A soma de dois números, multiplicada pela diferença dos mesmos dois números, é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

Exercícios orais

1. $(c+d)(c-d) =$	8. $(m+n)(m-n) =$
2. $(r+s)(r-s) =$	9. $(x+y)(x-y) =$
3. $(a+3)(a-3) =$	10. $(m+5)(m-5) =$
4. $(r+1)(r-1) =$	11. $(x+7)(x-7) =$
5. $(2a+b)(2a-b) =$	12. $(a+3m)(a-3m) =$
6. $(5r+3s)(5r-3s) =$	13. $(2x+y)(2x-y) =$
7. $(5a^2+3b)(5a^2-3b) =$	14. $(5ab+3c)(5ab-3c) =$

IV. $\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

[*Quarta fórmula*]

V. $\mathbf{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

[*Quinta fórmula*]

Observação. Deixamos aos estudantes o cuidado de demonstrarem e traduzirem em linguagem ordinária as fórmulas IV e V.

Exercícios orais

Calcular mentalmente as expressões seguintes:

1. $(x+y)^3$	3. $(a+2)^3$	5. $(2a+1)^3$	7. $(x+3)^3$
2. $(x-y)^3$	4. $(a-2)^3$	6. $(2a-1)^3$	8. $(x-2)^3$

VI.

$$\begin{array}{r} x + 5 \\ x + 4 \\ \hline x^2 + 5x \qquad\; \\ + 4x + 20 \\ \hline x^2 + 9x + 20 \end{array}$$

Consideremos a expressão $(x+5)(x+4)$. E' um produto de dois binômios, *cujos primeiros têrmos são iguais*. Efetuando a multiplicação indicada, acharemos $x^2+9x+20$. Ora, se observarmos com atenção a operação realizada, concluiremos que esta é dispensável. E' bastante observar que:

$$(x+5)(x+4) = x^2 + (5+4)x + 5 \times 4$$

[*Sexta fórmula*]

$$\mathbf{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab}$$

Esta fórmula significa que:

O produto de dois binômios que têm um têrmo comum é igual ao quadrado do têrmo comum; mais a soma algébrica dos têrmos diferentes, multiplicada pelo têrmo comum; mais o produto algébrico dos têrmos diferentes.

Exemplos

$(a+3)(a+5) = a^2+8a+15$	$(x-3)(x-5) = x^2-8x+15$
$(m+8)(m-5) = m^2+3m-40$	$(c+3)(c-5) = c^2-2c-15$

Exercícios orais

Calcular as expressões seguintes:

1. $(a+7)(a+1)$	4. $(b-5)(b+6)$	7. $(ab+7)(ab-4)$
2. $(x+5)(x+6)$	5. $(c-3)(c-4)$	8. $(d-4)(d+7)$
3. $(m+9)(m-4)$	6. $(3x-2m)(3x+m)$	9. $(e+8)(e+5)$

10. $(a+2b)(a+5b)$
11. $(a-3x)(a+5x)$
12. $(x+4m)(x-3m)$
13. $(4a+c)(4a-c)$ –
14. $(a^2-5)(a^2+3)$
15. $(2a+5)(2a-4)$
16. $(3m-4)(3m+7)$
17. $(2c+5)(2c-6)$
18. $(5x+1)(5x-2)$
19. $(2a+b)(2a+2b)$
20. $(3x+5)(3x-6)$
21. $(x^2-2a)(x^2+3a)$

VII.

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ 3x + 7 \\ \hline 6x^2 + 15x \\ + 14x + 35 \\ \hline 6x^2 + 29x + 35 \end{array}$$

Seja a expressão $(2x+5)(3x+7)$. E' um produto de dois binômios cujos primeiros têrmos são semelhantes, assim como os segundos. Efetuando a multiplicação indicada, acharemos $6x^2+29x+35$. Ora, se observarmos com atenção a operação realizada, verificaremos que, na prática, esta operação é também dispensável. Com efeito,

a) O primeiro têrmo do produto resulta da multiplicação dos primeiros têrmos dos dois binômios.

b) O segundo têrmo do produto é a soma dos dois produtos que se obtêm, supondo um binômio colocado por baixo do outro, e multiplicando em cruz os quatro têrmos dos dois binômios.

c) O terceiro têrmo do produto resulta da multiplicação dos segundos têrmos dos dois binômios.

Exemplos

1. $(5a+3)(7a+2) = 35a^2 + (+10a + 21a) + 6 = 35a^2 + 31a + 6$
2. $(3x+4)(5x-6) = 15x^2 + (-18x + 20x) - 24 = 15x^2 + 2x - 24$
3. $(4m-7)(3m+2) = 12m^2 + (+8m - 21m) - 14 = 12m^2 - 13m - 14$
4. $(3c-5)(4c-7) = 12c^2 + (-21c - 20c) + 35 = 12c^2 - 41c + 35$

[*Sétima fórmula*]

$$(\mathbf{ax} + \mathbf{b})(\mathbf{cx} + \mathbf{d}) = \mathbf{acx^2} + (\mathbf{ad} + \mathbf{bc})\mathbf{x} + \mathbf{bd}$$

Observação. Na prática, os estudantes calcularão o segundo têrmo do produto, multiplicando em primeiro lugar os têrmos extremos e depois os têrmos centrais dos dois binômios dados. No primeiro exemplo, sendo $5a$ e 2 os têrmos extremos, e 3 e $7a$, os têrmos centrais, dirão: $5a \times 2 = 10a$; $3 \times 7a = 21a$; $10a + 21a = 31a$.

Exercícios orais

Calcular as seguintes expressões:

1. $(2a+5)(3a+1)$
2. $(m+3)(2m+4)$
3. $(3x-2)(2x-5)$
4. $(5c-4)(3c+2)$
5. $(3y-1)(4y-2)$
6. $(2a+b)(3a+2b)$
7. $(a^2+5)(3a^2-4)$
8. $(ab+3)(3ab-5)$
9. $(3xy-1)(4xy+5)$
10. $(3ab+2c)(ab+3c)$
11. $(m^2+3)(m^2-1)$
12. $(5ac-4)(3ac+2)$

Em resumo, as principais fórmulas elementares de multiplicação algébrica são sete, a saber:

I. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
II. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
III. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$
IV. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 + \mathbf{b}^3$
V. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 - 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 - \mathbf{b}^3$
VI. $(\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b}) = \mathbf{x}^2 + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x} + \mathbf{ab}$
VII. $(\mathbf{ax}+\mathbf{b})(\mathbf{cx}+\mathbf{d}) = \mathbf{acx}^2 + (\mathbf{ad}+\mathbf{bc})\mathbf{x} + \mathbf{bd}$

Conhecendo bem estas fórmulas, os estudantes podem evitar, na prática, numerosas multiplicações de binômios.

As sete fórmulas que acabámos de aprender são igualdades que subsistem sempre, sejam quais forem os valores atribuídos às letras que nelas figuram, *contanto que êstes valores sejam os mesmos para ambos os membros de cada uma delas.* Tais igualdades chamam-se *identidades.*

Identidade é uma igualdade que se verifica sempre, sejam quais forem os valores numéricos atribuídos às letras que nela figuram.

As igualdades constituídas exclusivamente de números entram na categoria das identidades. Assim,

$3 \times 8 = 24$ $\quad 3 \times 8 = 6 \times 4$ $\quad 3 \times 8 = 48 \div 2$

são identidades.

Exercícios. Série XIV

Calcular as expressões que se seguem, fazendo uso das fórmulas de multiplicação.

1. $(2a+3b)^2-(5a-2b)^2+(3a+b)(3a-b)$
2. $(x+5)(x+7)-(x-4)(x-3)+(2x-3)^2-(4-3x)^2$
3. $(a+b)^3-(a-b)^3+(2a-3b)^3$
4. $(3x+5)(2x-5)-(2x+3)^2-(5x+2)(3x-4)$
5. $(4a+3b)(5a+2b)+(3a+2b)^2-(7a+b)(7a-b)$
6. $(m+5)^2-(m-4)^2+(3m+2)(3m-2)-(m+5)(m-4)$

Transformar os trinômios seguintes em produtos de dois binômios, isto é, descobrir os dois binômios que, multiplicados um pelo outro, reproduzem os trinômios dados.

7. $x^2+12x+36$	14. $a^2-8a+16$	21. $x^2+28x+196$
8. $y^2+24y+144$	15. $a^2-50ab+625b^2$	22. $x^2+11x+30$
9. $x^2+34x+289$	16. $x^2+11x+24$	23. $9a^2b^2+30abc+25c^2$
10. a^2+5a+6	17. $a^2+9ab+20b^2$	24. $x^2-8x+12$
11. x^2+2x+1	18. y^4-20y^2+100	25. $16a^2b^4-8ab^3c+b^2c^2$
12. x^2-7x+6	19. $a^2b^2-11ab+30$	26. x^2+6x-7
13. x^2+3x+2	20. $x^2-7x+12$	27. $z^2+11z-12$

33. Quadrado e raiz quadrada de um monômio. Para calcular o quadrado de um monômio, é bastante multiplicá-lo por si mesmo.

$$(5a^3b)^2 = 5a^3b \times 5a^3b = 25a^6b^2$$
$$(7a^4b^5)^2 = 7a^4b^5 \times 7a^4b^5 = 49a^8b^{10}$$
$$(-3x^5)^2 = (-3x^5)(-3x^5) = 9x^{10}$$
$$(-5ab^2)^2 = (-5ab^2)(-5ab^2) = 25a^2b^4$$

Regra. *Para calcular o quadrado ou a segunda potência de um monômio, eleva-se o coeficiente ao quadrado e multiplicam-se os expoentes por 2. O monômio dado pode ser positivo ou negativo; seu quadrado é sempre positivo.* (*)

De acôrdo com a regra para elevar um monômio ao quadrado, resulta que um monômio qualquer, para ser quadrado perfeito, deve preencher as três condições seguintes:

(*) Quando dizemos que um monômio é positivo ou negativo, estamos nos referindo ao sinal + ou — que o precede, e não ao sinal do resultado que se obtém, ao calcular o valor numérico do mesmo monômio. Um monômio positivo pode tornar-se negativo, ou mesmo nulo, quando se substituem as letras que nele entram por determinados valores numéricos.

a) Deve ser positivo.
b) O coeficiente deve ser quadrado perfeito.
c) Os expoentes devem ser divisíveis por 2.

Portanto, o monômio $-25a^4b^2$ não é quadrado perfeito porque não há monômio positivo ou negativo, cujo quadrado seja um monômio negativo; o monômio $+20a^4b^2$ também não é quadrado perfeito porque o coeficiente 20 não é um quadrado perfeito; o monômio $+25a^4b^3$ também não é quadrado perfeito porque o expoente do fator b não é divisível por 2.

Entretanto, o monômio $+25a^4b^2$ é quadrado perfeito, porque preenche as três condições indicadas; *sua raiz quadrada é* $5a^2b$ porque $5a^2b \times 5a^2b = 25a^4b^2$.

Observação. O monômio $+25a^4b^2$ tem duas raízes quadradas, a saber, $+5a^2b$ e $-5a^2b$. Com efeito,

$$(+5a^2b)(5a^2b) = 25a^4b^2 \quad .. \quad (-5a^2b)(-5a^2b) = 25a^4b^2$$

Em rigor, deveríamos dizer ou escrever: $\sqrt{25a^4b^2} = \pm 5a^2b$.
Até nova ordem, porém, consideraremos sòmente a raiz positiva.

Regra. *Para extrair a raiz quadrada de um monômio, extrai-se a raiz quadrada do coeficiente e dividem-se os expoentes por 2.*

Esta regra resulta espontâneamente da elevação de um monômio ao quadrado. Por exemplo,

$$\sqrt{9a^2x^6} = 3ax^3 \qquad \sqrt{36m^4n^6} = 6m^2n^3 \qquad \sqrt{49a^4m^6x^8} = 7a^2m^3x^4$$

34. Cubo e raiz cúbica de um monômio. Para calcular o cubo ou a terceira potência de um monômio, é bastante tomá-lo três vêzes como fator.

$$(7a^4b^2c)^3 = 7a^4b^2c \times 7a^4b^2c \times 7a^4b^2c = 343a^{12}b^6c^3$$
$$(-6am^4x^5)^3 = (-6am^4x^5)(-6am^4x^5)(-6am^4x^5) = -216a^3m^{12}x^{15}$$

Regra. *Para calcular o cubo ou a terceira potência de um monômio, eleva-se o coeficiente ao cubo ou à terceira potência e multiplicam-se os expoentes por 3. Se o monômio dado é positivo, sua terceira potência é positiva; se é negativo, sua terceira potência é negativa.*

De acôrdo com a regra para elevar um monômio à terceira potência, resulta que um monômio qualquer, para ser um cubo perfeito ou uma terceira potência exata, deve preencher as duas condições seguintes:

a) *O coeficiente deve ser um cubo perfeito.*

b) *Os expoentes devem ser divisíveis por* 3.

Quanto ao sinal, pode ser positivo ou negativo.

Portanto, o monômio $10a^3b^6$ não é um cubo perfeito porque o coeficiente 10 não é um cubo perfeito; o monômio $27a^3b^7$ também não é um cubo perfeito porque o expoente do fator b não é divisível por 3.

Entretanto, o monômio $27a^3b^6$ é um cubo perfeito, porque preenche as condições indicadas; sua raiz cúbica é $3ab^2$ porque $3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 = 27a^3b^6$.

Regra. *Para extrair a raiz cúbica de um monômio, extrai-se a raiz cúbica do coeficiente, e dividem-se os expoentes por* 3.

Esta regra resulta espontâneamente da elevação de um monômio à terceira potência. Por exemplo,

$$\sqrt[3]{125a^6b^{12}} = 5a^2b^4 \qquad \sqrt[3]{-216m^6n^{12}x^{15}} = -6m^2n^4x^5$$

35. Quarta potência e raiz quarta de um monômio. Para calcular a quarta potência de um monômio, é bastante tomá-lo quatro vêzes como fator.

$$(3a^4b^2c)^4 = 3a^4b^2c \times 3a^4b^2c \times 3a^4b^2c \times 3a^4b^2c = 81a^{16}b^8c^4$$

$$(-5m^3x^5)^4 = (-5m^3x^5)(-5m^3x^5)(-5m^3x^5)(-5m^3x^5) = 625m^{12}x^{20}$$

Regra. *Para calcular a quarta potência de um monômio, eleva-se o coeficiente à quarta potência e multiplicam-se os expoentes por* 4. *O monômio dado pode ser positivo ou negativo; sua quarta potência é sempre positiva.*

De acôrdo com a regra para elevar um monômio à quarta potência, resulta que um monômio qualquer, para ser uma quarta potência exata, deve preencher as três condições seguintes:

a) *Deve ser positivo.*

b) *O coeficiente deve ser uma quarta potência exata.*

c) *Os expoentes devem ser divisíveis por* 4.

Portanto, o monômio $-81a^4b^8$ não é uma quarta potência exata, porque não há monômio positivo ou negativo cuja quarta potência seja um monômio negativo; o monômio $+50a^4b^8$ também não é uma quarta potência exata porque o coeficiente 50 não é uma quarta potência exata; o monômio $+81a^4b^9$ também

não é uma quarta potência exata porque o expoente do fator b não é divisível por 4.

Entretanto, o monômio $+81a^4b^8$ é uma quarta potência exata, porque preenche as três condições indicadas; *sua raiz quarta é* $3ab^2$ porque $3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 = 81a^4b^8$.

Regra. *Para extrair a raiz quarta de um monômio, extrai-se a raiz quarta do coeficiente e dividem-se os expoentes por* 4.

Esta regra resulta espontâneamente da elevação de um monômio à quarta potência. Por exemplo,

$$\sqrt[4]{16a^{12}b^{20}} = 2a^3b^5 \qquad \sqrt[4]{625m^8n^{28}} = 5m^2n^7$$

36. Potências e raízes dos monômios. O que dissemos nos três parágrafos anteriores é bastante para compreender como se eleva um monômio dado a uma potência qualquer, e como se extrai uma raiz de qualquer grau de um monômio dado. E é necessário não esquecer que:

a) *Uma potência qualquer de um monômio* **é um monômio.**

b) *Uma raiz de qualquer grau de um monômio* **é um monômio.**

37. Divisão de monômios. Já aprendemos a multiplicar dois monômios. (§ 29) Por exemplo,

$$7a^3b^4 \times 5a^2b^6 = 35a^5b^{10}$$

Consideremos agora a igualdade seguinte:

$$M \times 8a^3b^2c^4 = 40a^5b^7c^{10}$$

Nesta igualdade, o monômio $40a^5b^7c^{10}$ é o produto de dois monômios, um dos quais é conhecido: é o monômio $8a^3b^2c^4$. Como calcular o monômio M? Evidentemente, é necessário *desfazer* o que *fizemos* na multiplicação, isto é, *dividir o monômio* $40a^5b^7c^{10}$ *pelo monômio* $8a^3b^2c^4$. Ora, de acôrdo com a regra para multiplicar um monômio por outro, o valor do monômio M é $5a^2b^5c^6$. Portanto,

$$40a^5b^7c^{10} : 8a^3b^2c^4 = 5a^2b^5c^6$$

Regra. *Para dividir um monômio por outro, divide-se o coeficiente do primeiro pelo coeficiente do segundo e ter-se-á assim o coeficiente do quociente; ao lado dêste coeficiente escrevem-se as letras do*

dividendo, dando como expoente, a cada uma delas, a diferença entre seu expoente no dividendo e no divisor. Quanto ao sinal do quociente, será êle determinado pela regra dos sinais. (§ 19)

Exercícios orais

1. $12a^3 : 4a^2$	**8.** $(-64a^5m^8) : 8a^4m^2$	**15.** $m^{3a} : m^{2a}$
2. $24x^7 : 8x^2$	**9.** $(-24a^3x^4) : (-8ax)$	**16.** $a^{5m} : a^{2m}$
3. $a^4b^2 : ab$	**10.** $14a^3b^5 : (-2ab^2)$	**17.** $36a^{5m} : 4a^{2n}$
4. $12a^3b^6 : (-4a^2b)$	**11.** $36m^7n^7 : 9m^5n^2$	**18.** $x^{a+1} : x^{a-1}$
5. $(-a^{14}) : a^{11}$	**12.** $(-7a^3) : (-a^2)$	**19.** $x^{3a-5} : x^{2a-5}$
6. $8a^3b^3 : (-4a^2b)$	**13.** $a^m : a^n$	**20.** $a^{4m-2} : a^{3m-4}$
7. $5a^7x^5 : 5a^6x^3$	**14.** $12x^a : 3x^b$	**21.** $a^{m+n} : a^{m-n}$

38. O expoente zero. Dividindo a^5 por a^5 resulta a^{5-5}, isto é, a^0. (§ 37) O que significa a^0? Tomar a como fator *zero vêzes?* Evidentemente, isto não tem sentido. Estamos diante de um *resultado singular,* como se diz em Álgebra, e é necessário *interpretar,* isto é, explicar êste resultado, descobrir a sua significação. Ora, dividindo um número qualquer por si mesmo, o quociente é a unidade: $7 \div 7 = 1$, $8 \div 8 = 1$, etc.. Portanto, $a^5 : a^5 = 1$.

E estabeleceremos, então, *por convenção* que, *sendo* **a** *diferente de* **zero,** *a expressão* $\mathbf{a^0}$ *é igual à unidade.*

Nestas condições, $7^0 = 1$, $x^0 = 1$, $a^0b^0c^0 = 1$, $(abc)^0 = 1$, $(-5a^3b^2)^0 = 1$, $(a-b)^0 = 1$, $(a^3 + a^2 + a + 1)^0 = 1$, etc..

Dividindo $24a^3b^8c^7d$ por $3a^3b^5c^2d$, o quociente é $8a^0b^3c^5d^0$.

$$24a^3b^8c^7d : 3a^3b^5c^2d = 8a^0b^3c^5d^0$$

Já vimos, porém, que $a^0 = 1$ e $d^0 = 1$. Logo,

$$24a^3b^8c^7d : 3a^3b^5c^2d = 8 \times 1 \times b^3 \times c^5 \times 1 = 8b^3c^5$$

Portanto, *quando uma letra tem o mesmo expoente no dividendo e no divisor, ela não aparece no quociente.*

Exercícios orais

1. $a^4b : a^3b$	**6.** $15m^4nr : 3mn$	**11.** $x^5 : (-x^4)$
2. $(-a^7) : a^7$	**7.** $36x^3y^3z : 9x^3y^3$	**12.** $x^8 : (-x^8)$
3. $x^5 : x^5$	**8.** $x^5 : (-x^5)$	**13.** $(-m^4) : m^4$
4. $3a^2 : (-a^2)$	**9.** $x^4 : x^3$	**14.** $r^7 : (-r^7)$
5. $a^4b^3c : abc$	**10.** $x^4 : x^4$	**15.** $a^2b : (-ab)$

39. O expoente negativo. Dividindo a^2 por a^5 resulta a^{2-5}, isto é, a^{-3}. (§ 37) O que significa a^{-3}? Tomar a como fator *menos três vêzes?* Evidentemente, isto não tem sentido. Estamos diante de outro *resultado singular,* que é necessário *interpretar.*

$$\text{Ora:} \quad a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$$

$$\text{Portanto,} \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

E convencionaremos que:

Uma potência com expoente negativo, de um número **a** *diferente de* **zero,** *é igual a uma fração cujo numerador é a unidade, e cujo denominador é a mesma potência, com o mesmo expoente, porém positivo.*

Uma vez interpretado o expoente negativo, chegamos facilmente às duas conclusões seguintes:

I. *Quando um monômio contém uma letra com expoente negativo, devemos colocá-la no denominador, trocando, porém, o sinal do seu expoente.* Com efeito,

$$3a^{-5} = 3 \times \frac{1}{a^5} = \frac{3}{a^5} \qquad 5a^3b^{-3} = 5 \times a^3 \times \frac{1}{b^3} = \frac{5a^3}{b^3}$$

$$2^{-3}a^4b^{-4} = \frac{1}{2^3} \times a^4 \times \frac{1}{b^4} = \frac{a^4}{8b^4}$$

II. *Quando um monômio contém uma letra com expoente negativo no denominador, devemos colocá-la no numerador, trocando, porém, o sinal do seu expoente.* Com efeito,

$$\frac{a^5}{b^{-5}} = a^5 : b^{-5} = a^5 : \frac{1}{b^5} = a^5 \times \frac{b^5}{1} = a^5b^5$$

$$\frac{a^{-3}}{2b^{-5}} = a^{-3} : 2b^{-5} = \frac{1}{a^3} : \frac{2}{b^5} = \frac{1}{a^3} \times \frac{b^5}{2} = \frac{b^5}{2a^3}$$

Exercícios. Série XV

Fazer desaparecer os expoentes negativos nas expressões algébricas seguintes:

1. $5a^3b^{-3} + 7x^{-5}a^4 - 4^{-2}x^8 - 3a^{-1}b^{-1}$

2. $m^4n^{-4} - m^{-5}n^5 + 4m^3n^{-3} - 3m^2n^2$

3. $2^{-1}ab - 5^{-1}bc + 7^{-1}ac - 3a^{-2}b^2c^{-2}$

4. $\dfrac{3a}{m^{-2}} + \dfrac{5a^{-3}}{m^2} - \dfrac{3m^{-3}}{5^{-1}a^{-3}}$

5. $3a^2b^0 + 5a^0b^2 + \dfrac{8c}{a^0b^0}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.

6. $\dfrac{5a^3}{b^2c^0} - \dfrac{4b^0}{a^0c^2} + \dfrac{2ab}{c^2d} - \dfrac{8c^0d^2}{a^2b^0} + \dfrac{5}{36}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 1$.

7. $5a^{-2} + 3b^{-1} + 4c^{-2} + \dfrac{11d^0}{20}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 10$.

8. $4^{-1}abc - 2^{-2}a^2b^{-2}c^0 + 8^{-1}a^{-2}b^2c^2 + 16^{-1}a^0b^0c^0$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$.

9. $3a^{-2}bc^{-1} - 12a^2b^{-2}c + 9a^0b^2c^{-1} - 18^{-1}abc + \dfrac{7}{9}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.

10. $\dfrac{a^0}{b^0} + \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} + \dfrac{a^{-2}}{b^{-2}} + \dfrac{a^{-3}}{b^{-3}} + \dfrac{a^{-4}}{b^{-4}} + \dfrac{a^{-5}}{b^{-5}}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 10$ e $b = 20$.

40. O expoente fracionário. Já aprendemos que (§§ 33 a 36):

$\sqrt{a^6} = a^3$	$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$	$\sqrt[4]{a^{20}} = a^5$	$\sqrt[5]{a^{30}} = a^6$
$\sqrt{a^8} = a^4$	$\sqrt[3]{a^{18}} = a^6$	$\sqrt[4]{a^{28}} = a^7$	$\sqrt[5]{a^{20}} = a^4$
$\sqrt{a^{10}} = a^5$	$\sqrt[3]{a^{21}} = a^7$	$\sqrt[4]{a^{32}} = a^8$	$\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$

Podemos resumir as regras conhecidas na seguinte

Regra. *A raiz com índice* **n**, *de* $\mathbf{a^m}$, *é* **a** *elevado a uma potência cujo expoente é* $\dfrac{m}{n}$.

De acôrdo com esta regra, teremos:

$$\sqrt{a^{12}} = a^6 \qquad \sqrt[3]{a^6} = a^2 \qquad \sqrt[4]{a^{12}} = a^3 \qquad \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}} \ (?)$$

Estamos diante de outro *resultado singular*. O que significa $a^{\frac{5}{3}}$? Tomar a como fator *cinco terços de uma vez*? Evidentemente, isto não tem sentido, e é necessário *interpretar* êste novo resultado singular. Mas a interpretação já está feita nas linhas acima; o que dissemos é bastante para compreender que:

$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$	$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$	$7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$
$a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$	$a^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{a^4}$	$a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3}$

Fica então estabelecido que:

Um número com expoente fracionário é a mesma coisa que um radical cujo radicando é o número dado, cujo expoente é o numerador e cujo índice é o denominador.

41. As frações algébricas. Nem sempre é possível dividir um monômio por outro. O monômio $24a^5b^2$ não é divisível pelo monômio $8a^3b^5$ porque o expoente de b no divisor é maior do que o expoente desta mesma letra no dividendo. Verdade é que poderíamos escrever (§ 39):

$$24a^5b^2 : 8a^3b^5 = 3a^2b^{-3}$$

Mas, na divisão algébrica, não devemos operar com expoentes negativos, como veremos mais tarde. (§ 44)

Igualmente $24a^3b^4$ não é divisível por $8a^2b^2c$ porque há no divisor uma letra que não existe no dividendo. Na verdade poderíamos escrever:

$$24a^3b^4c^0 : 8a^2b^2c = 3ab^2c^{-1}$$

Mas apareceria então no quociente uma letra com expoente negativo. Em resumo, a divisão de um monômio por outro é impossível quando:

a) O expoente de uma letra no divisor é maior que o expoente da mesma letra no dividendo.

b) Há no divisor uma letra que não existe no dividendo.

Quando um monômio não é divisível por outro, representaremos o quociente sob a forma de fração (algébrica) como fizemos em Aritmética. (E.M.P.V. § 143)

$$3a : 5b = \frac{3a}{5b} \qquad 7a^2b : 10ab^2 = \frac{7a^2b}{10ab^2} \qquad 12a^3b : 4a^2c = \frac{12a^3b}{4a^2c}$$

E aparecem assim as frações algébricas.

A fração algébrica é o quociente indicado da divisão de um monômio por outro. (*) Os dois monômios que a constituem são chamados *têrmos;* o que fica sôbre o traço horizontal é o *numerador* e o que fica em baixo do mesmo traço é o *denominador*.

Todas as transformações e operações relativas às frações aritméticas se aplicam, sem restrições, às frações algébricas, não esquecendo, porém, que os têrmos de uma fração algébrica são expressões algébricas.

Observação. *Quando a divisão de um monômio por outro é impossível, indica-se a divisão e simplifica-se a fração resultante.*

Exercício. Dividir $12am^5n^4p^3q^2$ por $4m^2n^3p^4q^5$

$$12am^5n^4p^3q^2 : 4m^2n^3p^4q^5 = \frac{12am^5n^4p^3q^2}{4m^2n^3p^4q^5} = \frac{3am^3n}{pq^3}$$

Exercícios orais

Simplificar as seguintes frações:

1. $\dfrac{3ab}{bc}$
2. $\dfrac{4a}{8a^2}$
3. $\dfrac{ab}{ax}$
4. $\dfrac{3xy}{6xy}$
5. $\dfrac{18a^2}{30}$
6. $\dfrac{m}{m^2n}$
7. $\dfrac{3x}{6y}$
8. $\dfrac{5a}{5a}$
9. $\dfrac{x^2y^2}{x^3y^3}$
10. $\dfrac{a^2m}{am^2}$
11. $\dfrac{4a^3m^2}{7a^4m^2}$
12. $\dfrac{10abd}{5abc}$
13. $\dfrac{3x^5}{6x^6}$
14. $\dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^3c^2}$
15. $\dfrac{2abc}{abc}$
16. $\dfrac{m^4n}{mn^4}$

Exercícios. Série XVI

Efetuar as seguintes operações:

1. $\dfrac{3}{a} + \dfrac{5}{a}$
2. $\dfrac{3}{a} \times \dfrac{2a}{5}$
3. $\dfrac{5a^2}{2a} + \dfrac{3a^2}{2a}$
4. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{b}{a}$
5. $\dfrac{2a}{b} + \dfrac{3a}{b}$
6. $\dfrac{a}{b} \times (-1)$

(*) Completaremos adiante (§47) esta definição.

7. $\dfrac{7a}{3} - \dfrac{m}{3}$
8. $4a^2 \times \dfrac{5}{a^3}$
9. $\dfrac{x^3}{m} + \dfrac{x^3}{m}$
10. $\dfrac{3x}{y} \times (-1)$
11. $\dfrac{5x^2}{a} - \dfrac{3x^2}{a}$
12. $\dfrac{2x}{3} : \dfrac{3x}{2}$
13. $\dfrac{3a}{4b} \times \dfrac{5b}{6a}$
14. $2m \times \dfrac{3}{m^2}$
15. $\dfrac{2a}{m} + \dfrac{3b}{m}$
16. $\dfrac{5mn}{6ab} : mn$
17. $\dfrac{8m^3}{5m} - \dfrac{3m^3}{5m}$
18. $\dfrac{2}{a} + \dfrac{3}{x}$
19. $\dfrac{3mn}{m} - \dfrac{5mn}{m}$
20. $6ab : \dfrac{3ab}{5}$
21. $\dfrac{2m}{n} \times (-1)$
22. $\dfrac{3}{ax} \times 2x$
23. $\dfrac{m}{a} - \dfrac{n}{b}$
24. $\dfrac{a}{5} + \dfrac{a}{3}$
25. $12a^5b^7 : 30a^3b^8 =$
26. $6x^3y^2 : 15x^2y^3z =$
27. $91a^2mx^2 : 117am^2x =$
28. $(-51abdy^2) : 3a^2bdy =$
29. $121m^4nx : (-44m^3nxy) =$
30. $(-39a^4bc^4d) : (-52a^3b^2c^3d^2) =$
31. $\dfrac{3a^5b}{5} : \dfrac{9a^4b^2}{10} =$
32. $\dfrac{5m^3n}{6} : \dfrac{10mn^3}{12} =$
33. $\dfrac{7a^3b^2c^4}{3} : \dfrac{14ab^3c}{9} =$
34. $\dfrac{5xy^3z}{11} : \dfrac{25x^3yz^3}{33} =$
35. $\left(\dfrac{5a^3b}{4}\right)^2 : \dfrac{10a^5b^3}{12} =$
36. $\left(\dfrac{2abc}{3}\right)^3 : \dfrac{10a^2b^4c^4}{9} =$

42. O sinal nas frações algébricas. Em uma fração algébrica temos três sinais a considerar:

a) O sinal do numerador, isto é, o sinal que qualifica o numerador ou dividendo.

b) O sinal do denominador, isto é, o sinal que qualifica o denominador ou divisor.

c) O sinal que precede a fração, isto é, o sinal que qualifica a fração ou quociente.

Vejamos o que se pode fazer com êstes três sinais.

Observemos que:

$$+\frac{+15}{+5} = +(+3) = +3$$

$$+\frac{-15}{-5} = +(+3) = +3$$

$$-\frac{+15}{-5} = -(-3) = +3$$

$$-\frac{-15}{+5} = -(-3) = +3$$

Regra. *Dada uma fração algébrica, e considerando os três sinais que ela contém, podemos, se nos convier,* **mudar dois sinais quaisquer,** *sem que o valor da fração se altere.*

De um modo geral,

$$+\frac{+m}{+n} = +\frac{-m}{-n} = -\frac{+m}{-n} = -\frac{-m}{+n}$$

A regra acima também pode ser enunciada nos seguintes têrmos:

Dada uma fração algébrica, podemos multiplicar um de seus têrmos por -1 (trocar o sinal de um de seus têrmos) *contanto que se mude o sinal positivo ou negativo que precede a fração.*

Exercícios para o quadro-negro

Escrever de quatro modos diferentes cada uma das seguintes frações:

1. $\frac{7}{10}$	3. $-\frac{5}{9}$	5. $\frac{2}{-5}$	7. $\frac{-3}{8}$	9. $\frac{-2}{-9}$
2. $-\frac{m}{n}$	4. $\frac{r}{s}$	6. $\frac{-m}{n}$	8. $\frac{m}{-n}$	10. $\frac{-a}{-x}$

43. Grau de uma expressão algébrica. Consideremos alguns monômios racionais e inteiros, por exemplo, $6a^3b$, $10abc$, $12x$ e $30ab^2cd^2$. Lembrando que $abcde$ significa $a\times b\times c\times d\times e$, teremos:

$$\begin{aligned} 6a^3b &= 6\times a\times a\times a\times b \\ 10abc &= 10\times a\times b\times c \\ 12x &= 12\times x \\ 30ab^2cd^2 &= 30\times a\times b\times b\times c\times d\times d \end{aligned}$$

O primeiro monômio é constituído por cinco fatores dos quais um é numérico e *quatro são literais;* diremos então que o monômio $6a^3b$ é do quarto grau. O monômio $10abc$, tendo *três fatores literais,* é do terceiro grau; o monômio $12x$ é do *primeiro grau* e o monômio $30ab^2cd^2$ é do *sexto grau.*

O grau de um monômio racional e inteiro é a soma dos expoentes das letras que entram neste monômio.

Observação. Se o monômio é constituído apenas por um número, diremos que êste monômio é do grau *zero.* Por exemplo, o monômio 5 é do grau zero. Com efeito, $5 = 5a^0 = 5a^0m^0 = 5a^0m^0x^0$, etc., e a soma dos expoentes das letras de qualquer um dêstes monômios é zero.

Consideremos os seguintes monômios racionais e fracionários:

$$\frac{a^5b^7}{a^2b^3} \qquad \frac{5a^3m^4}{a^2m} \qquad \frac{3a^5x^5}{a^2x^2}$$

Simplificando êstes monômios resulta:

$$\begin{aligned} a^5b^7 &\div a^2b^3 = a^3b^4 \\ 5a^3m^4 &\div a^2m = 5am^3 \\ 3a^5x^5 &\div a^2x^2 = 3a^3x^3 \end{aligned}$$

E diremos que o primeiro monômio é do 7.º grau, o segundo é do 4.º grau e o terceiro é do sexto grau.

O grau de um monômio racional e fracionário é a diferença entre o grau do numerador e o grau do denominador.

Observação. Consideremos o monômio $\frac{a^4b}{mx}$. Desta vez não é possível simplificá-lo e transformá-lo em um monômio inteiro. Entretanto, sendo o numerador do 5.º grau e o denominador do 2.º grau, diremos, ainda neste caso, que êste monômio é do 3.º grau.

Consideremos o monômio irracional $\sqrt[3]{a^3b^6c^9}$. Já sabemos que $\sqrt[3]{a^3b^6c^9} = ab^2c^3$. Observemos que o radicando é do 18.º grau, o índice da raiz é 3 e o monômio ab^2c^3 é do 6.º grau. E diremos que:

O grau de um monômio irracional é igual ao grau do radicando, dividido pelo índice da raiz.

Portanto, $\sqrt{a^6}$ é um monômio do 3.º grau, $\sqrt[3]{a^{15}}$ é um monômio do 5.º grau, etc..

Observação. Não é possível transformar $\sqrt{a^3b^5}$ em um monômio racional; entretanto, diremos por analogia que êste monômio é do 4.º grau.

O grau de uma expressão algébrica qualquer é o grau do têrmo de mais elevado grau.

Consideremos os polinômios seguintes:

$$a^5 - a^4b^3 + 7a^3b^4 - b^8 \qquad \frac{a^3b}{m} - \sqrt{a^2b^4} + 4a^2b^3$$

O primeiro polinômio é do 8.º grau porque seu têrmo de grau mais elevado, isto é, o têrmo b^8, é do 8.º grau.

O segundo polinômio é do 5.º grau, porque seu têrmo de grau mais elevado, isto é, o têrmo $4a^2b^3$, é do 5.º grau.

Às vêzes, pede-se o grau de um polinômio em relação a uma determinada letra do mesmo polinômio. Nestas condições, responderemos que o primeiro polinômio é do 5.º grau em relação à letra a, e do 8.º grau em relação à letra b; o segundo polinômio é do 3.º grau em relação à letra a ou à letra b, e do grau -1 em relação à letra m.

Um polinômio é *homogêneo* quando todos os seus têrmos são do mesmo grau; é *não homogêneo* no caso contrário. Por exemplo, considerando os polinômios

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad x^3-x^2+x-1$$

diremos que ambos são do 3.º grau, sendo que o primeiro é *homogêneo* e o segundo é *não homogêneo.*

44. Divisão algébrica. *A divisão algébrica é a operação que tem por fim, dadas duas expressões algébricas* **racionais** e **inteiras,** *chamadas respectivamente* **dividendo** *e* **divisor,** *formar uma terceira expressão algébrica, também* **racional** *e* **inteira,** *chamada* **quociente,** *cujo valor numérico seja sempre igual ao quociente dos valores numéricos do dividendo e do divisor, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números (ou valores) aliás quaisquer, nos três polinômios.*

Representando o dividendo, o divisor e o quociente respectivamente por A, B, Q, teremos:

$$A \div B = Q \quad \therefore \quad A = B \times Q$$

A segunda igualdade significa que o dividendo é um produto constituído por dois fatores: o divisor e o quociente. Podemos então dizer que:

A divisão algébrica é a operação que tem por fim, conhecendo o produto de duas expressões algébricas **racionais** e **inteiras,** *e uma destas expressões, calcular a outra.*

Na divisão algébrica há três casos a considerar:

a) *Divisão de um monômio por um monômio.*

b) *Divisão de um polinômio por um monômio.*

c) *Divisão de um polinômio por um polinômio.*

O primeiro caso já foi estudado. Vimos como se divide um monômio por um monômio (§ 37); vimos também em que casos a divisão é impossível e como, da impossibilidade desta divisão, resultam os expoentes nulos ou negativos e as frações algébricas.

E agora podemos acrescentar que a divisão é impossível quando não existe o terceiro monômio racional e inteiro exigido pela definição da divisão algébrica.

E' necessário insistir sôbre o seguinte: a divisão de um monômio por outro é considerada impossível quando:

a) o divisor contém letras que não existem no dividendo.

b) o expoente de uma letra no divisor é mais elevado que o expoente desta mesma letra no dividendo.

Pouco importa que o coeficiente do dividendo não seja divisível pelo coeficiente do divisor; isto não é um caso de impossibilidade na divisão de um monômio por outro. Assim é que $3a^4b^2$ é divisível, sob o ponto de vista algébrico, por $5a^3b$, sendo o quociente igual a $\frac{3ab}{5}$. Embora o coeficiente do quociente, isto é, $\frac{3}{5}$, seja fracionário, o quociente $\frac{3ab}{5}$ é, algèbricamente, uma expressão inteira.

Observação. Repetir os exercícios orais dos §§ 37 e 38.

45. Divisão de um polinômio por um monômio. Lembrando que:

$$(a+b+c)\times l = al+bl+cl$$

torna-se evidente que:

$$(al+bl+cl):l = a+b+c, \text{ isto é,}$$

Regra. *Para dividir um polinômio por um monômio, divide-se cada têrmo do polinômio, pelo monômio, e somam-se os quocientes.*

Na divisão de um polinômio por um monômio, é inútil o emprêgo da chave ou caixa da divisão, isto é, do sinal $\underline{|\quad\quad}$.

A operação se efetua como está indicado nos exemplos que se seguem:

1. $(15a^3b-10a^2b^2+20ab^3):5ab = 3a^2-2ab+4b^2$

2. $(3x^3-5x^2+7x):(-2x) = -\frac{3x^2}{2}+\frac{5x}{2}-\frac{7}{2}$

3. $(a^3x^2-a^4x^3+a^5x^4y):a^2x^2 = a-a^2x+a^3x^2y$

4. $(6a^2b^2-5a^3b^3+12a^4b^4):(-6a^2b^2) = -1+\frac{5ab}{6}-2a^2b^2$

5. $(a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4):ab = a^2-ab+b^2-\dfrac{b^4}{ab}$

$$= a^2-ab+b^2-\frac{b^3}{a}$$

6. $(a^3-a^2+a-5):am = \dfrac{a^3}{am}-\dfrac{a^2}{am}+\dfrac{a}{am}-\dfrac{5}{am}$

$$= \frac{a^2}{m}-\frac{a}{m}+\frac{1}{m}-\frac{5}{am}$$

Nos dois últimos exemplos, os quocientes são polinômios racionais, porém fracionários; logo. as divisões correspondentes são impossíveis. (§44) A divisão de um polinômio por um monômio é impossível quando um dos têrmos do polinômio não é divisível pelo monômio; neste caso, indica-se a divisão e, em seguida, simplifica-se a fração resultante.

Exercícios. Série XVII

1. $(6a^3-4a^2+2a):2a$
2. $(a^3-5a^2b+3ab^2-b^3):ab$
3. $(x^3y^3-x^2y^2+xy):xy$
4. $(6a^4-12a^5+18a^6):(-3a^4)$
5. $\left[a^3(x-y)-a^2(x-y)+a(x-y)-(x-y)\right]:(x-y)$
6. $(-24a^5x+30a^4x^2-36a^3x^3+42a^2x^4-48ax^5):(-6ax)$
7. $(3a^4b-5a^3b^2+6a^2b^3-7ab^4):8ab$
8. $(-4a^4b+6a^3b^2-8a^2b^3+10ab^4):(-2a^3b^2)$
9. $(xy^5-x^2y^4+x^3y^3-x^4y^2+x^5y):x^2y^2$
10. $\left(\dfrac{3a^3b}{4}-\dfrac{5a^2b^2}{6}+\dfrac{2ab^3}{5}\right):\dfrac{10ab}{11}$
11. $(5a^m-10a^{m-1}+15a^{m-2}+20a^{m-3}):5a^{m-5}$
12. $(a^{2m+1}-a^{2m}+a^{2m-1}-a^{2m-2}):a^{m-3}$

46. Divisão de um polinômio por um polinômio. (*) Para dividir um polinômio por um polinômio, procede-se de acôrdo com a seguinte

(*) Êste assunto não figura no atual programa de Matemática; podemos, pois, dispensá-lo, se assim o exigir a carência de tempo.

1.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^6-4x^4a^2+4x^2a^4-a^6 & x^2-a^2 \\ \cline{3-3}
 & -x^6+x^4a^2 & x^4-3x^2a^2+a^4 \\ \cline{2-2}
(\text{resto}) & -3x^4a^2+4x^2a^4-a^6 & \\
 & +3x^4a^2-3x^2a^4 & \\ \cline{2-2}
(\text{resto}) & +x^2a^4-a^6 & \\
 & -x^2a^4+a^6 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Regra. *Ordenam-se os dois polinômios de acôrdo com as potências decrescentes de uma mesma letra, e no mesmo sentido. Em seguida, divide-se o primeiro têrmo do dividendo,* $\mathbf{x^6}$, *pelo primeiro têrmo do divisor,* $\mathbf{x^2}$, *obtendo-se assim o primeiro têrmo do quociente,* $\mathbf{x^4}$. *Multiplica-se o primeiro têrmo do quociente por todo o divisor, e subtrai-se o produto de todo o dividendo. Divide-se o primeiro têrmo do resto,* $\mathbf{-3x^4a^2}$ *pelo primeiro têrmo do divisor,* $\mathbf{x^2}$, *obtendo-se, assim, o segundo têrmo do quociente,* $\mathbf{-3x^2a^2}$. *Multiplica-se o segundo têrmo do quociente por todo o divisor, e subtrai-se o produto de todo o primeiro resto. Divide-se o primeiro têrmo do segundo resto,* $\mathbf{x^2a^4}$, *pelo primeiro têrmo do divisor,* $\mathbf{x^2}$, *obtendo-se assim o terceiro têrmo do quociente,* $\mathbf{a^4}$. *Multiplica-se o terceiro têrmo do quociente por todo o divisor, e subtrai-se o produto de todo o segundo resto. E assim por diante.*

2.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3-y^3 & x-y \\ \cline{3-3}
 & -x^3+x^2y & x^2+xy+y^2 \\ \cline{2-2}
(\text{resto}) & +x^2y-y^3 & \\
 & -x^2y+xy^2 & \\ \cline{2-2}
(\text{resto}) & +xy^2-y^3 & \\
 & -xy^2+y^3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Neste segundo exemplo, os dois polinômios estão ordenados de acôrdo com as potências decrescentes de x. Esta *ordenação* deve ser conservada durante toda a operação. Ao efetuar a primeira subtração, ficaríamos embaraçados se, em lugar de x^2y-y^3 (resto), escrevêssemos $-y^3+x^2y$; como dividir y^3 por x? E' indispensável, pois, ao escrever os restos, ter o cuidado de ordená-los de acôrdo com a letra ordenatriz do dividendo e do divisor, e no mesmo sentido.

3.
$$\begin{array}{l|l}
a^3-3abc+b^3+c^3 & a+b+c \\ \cline{2-2}
\underline{-a^3-a^2b-a^2c} & a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
\quad -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 & \\
\quad \underline{+a^2b+ab^2+abc} & \\
\qquad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 & \\
\qquad \underline{+a^2c+abc+ac^2} & \\
\qquad\quad +ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 & \\
\qquad\quad \underline{-ab^2-b^3-b^2c} & \\
\qquad\qquad -abc+ac^2-b^2c+c^3 & \\
\qquad\qquad \underline{+abc+b^2c+bc^2} & \\
\qquad\qquad\quad +ac^2+bc^2+c^3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-ac^2-bc^2-c^3} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Esta divisão é, na aparência, muito difícil. Entretanto, é tão fácil como as outras. E' bastante tomar as seguintes precauções:

a) ordenar o dividendo, o divisor e os restos em relação à letra **a**.

b) se vários têrmos contêm **a** *com o mesmo expoente, ordená-los em relação à letra* **b**.

c) quanto aos têrmos que não contêm **a**, *ordená-los em relação à letra* **b**.

Vamos agora demonstrar a regra geral para dividir um polinômio por um polinômio. (*)

Em primeiro lugar observemos as duas multiplicações seguintes:

$$\begin{array}{r}
x^3+x^2+x^1+x^0 \\
x^2+x^1+x^0 \\ \hline
x^5+x^4+x^3+x^2 \qquad\qquad \\
+x^4+x^3+x^2+x^1 \qquad \\
+x^3+x^2+x^1+x^0 \\ \hline
x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x^1+x^0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
x^3+x^2+x^1+x^0 \\
x^1-x^0 \\ \hline
x^4+x^3+x^2+x^1 \\
\quad -x^3-x^2-x^1-x^0 \\ \hline
x^4 \qquad\qquad\qquad -x^0
\end{array}$$

O primeiro produto deveria ter 12 têrmos e o segundo, 8. Entretanto, o primeiro tem 6 têrmos e o segundo, apenas 2.

(*) Tudo o que se segue, até o fim do parágrafo, será ensinado aos estudantes quando êstes estiverem bem familiarizados com a divisão algébrica, isto é, depois de feitos todos os exercícios dados no fim dêste parágrafo.

Isto acontece porque os vários produtos parciais têm têrmos semelhantes, que se reduzem. Mas, por maior que seja o número de têrmos semelhantes, *o produto de um polinômio por um polinômio tem, pelo menos, dois têrmos.* E por que?

No primeiro exemplo, os dois polinômios estão ordenados segundo as potências decrescentes da letra x. Torna-se então evidente que o primeiro têrmo do produto, isto é, x^5, proveniente da multiplicação de x^3 por x^2, não pode, em absoluto, reduzir-se com qualquer outro têrmo. Anàlogamente, o último têrmo do produto, isto é, x^0, proveniente da multiplicação de x^0 por x^0, também não pode, em absoluto, reduzir-se com qualquer outro têrmo.

O mesmo acontece no segundo exemplo; quasi todos os têrmos dos produtos parciais são simétricos, dois a dois e, por isso, desaparecem do produto total. Êste é constituído sòmente pelos dois têrmos que não podem desaparecer, isto é, x^4 e x^0.

Em resumo, multiplicando dois polinômios convenientemente ordenados de acôrdo com as potências crescentes ou decrescentes de uma mesma letra, observa-se que:

a) O produto do primeiro têrmo do multiplicando pelo primeiro têrmo do multiplicador **é o primeiro têrmo do produto total.**

b) O produto do último têrmo do multiplicando pelo último têrmo do multiplicador **é o último têrmo do produto total.**

c) Os demais produtos parciais podem desaparecer do produto total.

d) O produto de dois polinômios pode ficar reduzido a um binômio.

Isto pôsto, vamos dividir o polinômio

$$15a^5-34a^4+62a^3-56a^2+53a-35$$

pelo polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5$$

Representando por $\mathbf{x+y+z+t+\ldots}$, o quociente da divisão, quociente êste que ainda não conhecemos, podemos escrever:

$$15a^5-34a^4+62a^3-56a^2+53a-35=(5a^3-3a^2+4a-5)(x+y+z+t+\ldots\ldots)$$

E, de acôrdo com a regra para multiplicar um polinômio por outro, lembremos que:

$$15a^5-34a^4+62a^3-56a^2+53a-35=\begin{cases}(5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{x}+\ldots\ldots \\ (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{y}+\ldots\ldots \\ (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{z}+\ldots\ldots \\ (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{t}+\ldots\ldots\end{cases}$$

Preparando a divisão como já foi indicado, teremos:

$$\begin{array}{l|l} 15a^5-34a^4+62a^3-56a^2+53a-35 & 5a^3-3a^2+4a-5 \\ \cline{2-2} & \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots \end{array}$$

Para determinar os valores de **x**, **y**, **z**, **t**, etc., dividamos o nosso trabalho em várias partes.

Primeira parte: determinação do têrmo x.

Estando os três polinômios ordenados, o primeiro têrmo do dividendo, $15a^5$, é o produto do primeiro têrmo do divisor, $5a^3$, pelo primeiro têrmo do quociente, x. Portanto,

$$15a^5 = 5a^3 \times x \quad \therefore \quad x = 3a^2$$

Está descoberto o primeiro têrmo do quociente: é $3a^2$. E fica também explicado por que é necessário dividir o primeiro têrmo do dividendo, pelo primeiro têrmo do divisor.

Multiplicando $3a^2$ por todo o divisor, e subtraindo o produto de todo o dividendo, teremos:

$$\begin{array}{rr|l} & 15a^5-34a^4+62a^3-56a^2+53a-35 & 5a^3-3a^2+4a-5 \\ \cline{3-3} & -15a^5+\ 9a^4-12a^3+15a^2 \qquad\qquad & 3a^2+\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots \\ \cline{2-2} (\textit{resto n. } 1) & -25a^4+50a^3-41a^2+53a-35 & \end{array}$$

Se a multiplicação de um polinômio por um polinômio está bem compreendida, é fácil concluir que o resto n.º 1 é o produto do polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5$$

pelo polinômio

$$\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots\ldots, \text{ isto é,}$$

$$-25a^4+50a^3-41a^2+53a-35 = \begin{cases} (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{y}\ + \\ (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{z}\ + \\ (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{t}\ +\ldots \end{cases}$$

Segunda parte: determinação do têrmo y.

Vamos então dividir o polinômio

$$-25a^4+50a^3-41a^2+53a-35$$

pelo polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5.$$

$$\begin{array}{l|l} -25a^4+50a^3-41a^2+53a-35 & 5a^3-3a^2+4a-5 \\ \cline{2-2} & \mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots \end{array}$$

Estando os três polinômios ordenados, o primeiro têrmo do dividendo, $-25a^4$, é o produto do primeiro têrmo do divisor, $5a^3$, pelo primeiro têrmo do quociente, y. Portanto,

$$-25a^4 = 5a^3 \times y \quad \therefore \quad y = -5a$$

Está descoberto o segundo têrmo do quociente: é $-5a$. E fica também explicado por que é necessário dividir o primeiro têrmo do *resto n.º* 1 pelo primeiro têrmo do divisor.

Multiplicando $-5a$ por todo o divisor, e subtraindo o produto de todo o dividendo, isto é, do *resto n.º* 1, teremos:

$$\begin{array}{rr|l} & -25a^4+50a^3-41a^2+53a-35 & 5a^3-3a^2+4a-5 \\ \cline{3-3} & +25a^4-15a^3+20a^2-25a \qquad & -5a+\mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots \\ \cline{2-2} (\textit{resto n.º } 2) & +35a^3-21a^2+28a-35 & \end{array}$$

O *resto n.º* 2 é por sua vez o produto do polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5$$

pelo polinômio $\quad \mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots\ldots$, isto é,

$$35a^3-21a^2+28a-35 = \begin{cases} (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{z}+ \\ (5a^3-3a^2+4a-5)\ \mathbf{t}+\ldots \end{cases}$$

Terceira parte: determinação do têrmo z.

Vamos então dividir o polinômio

$$35a^3-21a^2+28a-35$$

pelo polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5.$$

$$\begin{array}{l|l} 35a^3-21a^2+28a-35 & 5a^3-3a^2+4a-5 \\ \cline{2-2} & \mathbf{z}+\mathbf{t}+\ldots \end{array}$$

Estando os três polinômios ordenados, o primeiro têrmo do dividendo, $35a^3$, é o produto do primeiro têrmo do divisor, $5a^3$, pelo primeiro têrmo do quociente, z. Portanto,

$$35a^3 = 5a^3 \times z \quad \therefore \quad z = 7$$

Está descoberto o terceiro têrmo do quociente: é 7. E fica também explicado por que é necessário dividir o primeiro têrmo do *resto n.º* 2 pelo primeiro têrmo do divisor.

Multiplicando 7 por todo o divisor, e subtraindo o produto de todo o dividendo, isto é, do *resto n.º* 2, teremos:

$$\begin{array}{r|l} 35a^3-21a^2+28a-35 & 5a^3-3a^2+4a-5 \\ \cline{2-2} -35a^3+21a^2-28a+35 & 7+t+\ldots\ldots \\ \cline{1-1} (\textit{resto n.}^{\circ}\ 3)\qquad 0 & \end{array}$$

O *resto n.º* 3 é por sua vez o produto do polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5$$

pelo polinômio $t+\ldots\ldots$, isto é,

$$\textit{resto n.}^{\circ}\ 3 = (5a^3-3a^2+4a-5)t+\ldots\ldots$$

Mas o *resto n.º* 3 é nulo; é *zero*. Logo, o têrmo t e os têrmos seguintes do quociente não existem, e o quociente exato da divisão do polinômio

$$15a^5-34a^4+62a^3-56a^2+53a-35$$

pelo polinômio

$$5a^3-3a^2+4a-5$$

é o polinômio

$$3a^2-5a+7.$$

Exercícios. Série XVIII

Efetuar as seguintes divisões:

1. $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3):(a-b)$
2. $(a^2-7a+12):(a-4)$
3. $(x^4-9x^2+x^3-16x-4):(x^2+4+4x)$
4. $(m^2+m-72):(m-8)$
5. $(1+5x^3-6x^4):(1-x+3x^2)$
6. $(x^4-81y^4):(x-3y)$
7. $(a^3+b^3+c^3-3abc):(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
8. $(15a^3-2a^2-38a+24):(5a-4)$
9. $(a^5-b^5):(a-b)$
10. $(c^4-12-7c^2+c^3+17c):(3-2c+c^2)$
11. $(a^5-1):(a-1)$
12. $(a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6):(a^2-2ab+b^2)$
13. $(x^4-6xy-y^2-9x^2):(3x+y+x^2)$
14. $(m^5-243):(m-3)$
15. $(x^4-25y^4+6x^3y+9x^2y^2):(x^2+5y^2+3xy)$
16. $(32m^5-243n^5):(2m-3n)$
17. $(x^8-25y^8+9x^4y^4+6x^6y^2):(x^4+5y^4+3x^2y^2)$
18. $(x^6-y^6):(x-y)$
19. $(a^7+2a^3b^4-2a^4b^3-2a^6b-6a^2b^5-3ab^6):(a^3-2a^2b-ab^2)$

20. $(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc):(a+b+c)$
21. $(a^4-b^4):(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
22. $(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd):$ $:(a+b+c+d)$
23. $(x^5-3x^4+10x^3-19x^2+37x-20):(5x-4+x^3)$

47. Divisão com resto. Observando as quatro divisões já efetuadas (§ 46) notaremos que:

a) O dividendo e o divisor são polinômios racionais e inteiros.

b) O quociente é também um polinômio racional e inteiro.

Ora, o dividendo e o divisor são polinômios racionais e inteiros, de acôrdo com a definição da divisão algébrica (§ 44); mas o quociente nem sempre é um polinômio racional e inteiro, isto é, nem sempre é possível, dados dois polinômios racionais e inteiros, determinar um terceiro polinômio também racional e inteiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. Às vêzes, a divisão algébrica deixa um resto, tal qual como a divisão aritmética. Havendo resto, o primeiro polinômio (*dividendo*) não é *divisível* pelo segundo polinômio (*divisor*).

A não ser em poucos casos, não é possível afirmar, antes de efetuar uma divisão algébrica, que o primeiro polinômio seja exatamente divisível pelo segundo, isto é, que haja um terceiro polinômio racional e inteiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.

Preliminarmente, *devemos ordenar os dois polinômios de acôrdo com as potências* **decrescentes** *de uma mesma letra.* Isto pôsto, é provável que a divisão se faça exatamente quando:

a) O primeiro têrmo do dividendo é divisível pelo primeiro têrmo do divisor.

b) O último têrmo do dividendo é divisível pelo último têrmo do divisor.

Estas duas condições resultam claramente do que aprendemos no parágrafo anterior.

Entretanto, os dois polinômios dados preenchem, às vêzes, estas duas condições, sem que a divisão seja possível, isto é, sem que o primeiro polinômio seja divisível pelo segundo. E' o que vamos observar no exemplo seguinte.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -3x^4 & +10x^3 & -19x^2 & +16x & +16 & x^3+5x-4 \\
\cline{7-7}
-x^5 & & -5x^3 & +4x^2 & & & x^2-3x+5 \\
\hline
& -3x^4 & +5x^3 & -15x^2 & +16x & +16 & \\
& +3x^4 & & +15x^2 & -12x & & \\
\hline
& & +5x^3 & & +4x & +16 & \\
& & -5x^3 & & -25x & +20 & \\
\hline
& & & & -21x & +36 &
\end{array}
$$

Neste exemplo estão preenchidas as duas condições dadas para que o primeiro polinômio seja divisível pelo segundo. Entretanto, o primeiro têrmo do último resto não é divisível pelo primeiro têrmo do divisor. Neste caso, não podemos continuar a divisão porque, se insistíssemos em continuá-la, o quarto têrmo do quociente seria $(-21x):x^3$, isto é, $-\dfrac{21}{x^2}$ ou $-21x^{-2}$, e o quociente deixaria de ser um polinômio inteiro, o que não pode ser em virtude da definição da divisão algébrica.

E observemos que o resto é de grau inferior ao grau do divisor.

Havendo resto, teremos:

$$x^5-3x^4+10x^3-19x^2+16x+16 = (x^3+5x-4)(x^2-3x+5) + (-21x+36)$$

E' o que os estudantes devem verificar.

Portanto, quer em Aritmética, quer em Álgebra,

dividendo = divisor × quociente + resto

Ou, abreviadamente, $\mathbf{D = d \times Q + R}$

Esta *identidade* (§ 32) é, pois, comum à Aritmética e à Álgebra. Em Aritmética, o resto R é sempre menor que o divisor d; em Álgebra, o resto R é sempre de *grau inferior* ao do divisor d.

Quando a divisão deixa resto, o quociente pode ser completado com uma fração algébrica, como em Aritmética. Em relação ao nosso exemplo, escreveremos:

$$(x^5-3x^4+10x^3-19x^2+16x+16):(x^3+5x-4)$$
$$= x^2-3x+5+\frac{-21x+36}{x^3+5x-4}$$

Ou, $$\frac{x^5-3x^4+10x^3-19x^2+16x+16}{x^3+5x-4} = x^2-3x+5-\frac{21x-36}{x^3+5x-4} \quad (\S\, 42)$$

Para concluir observaremos que:

c) *A divisão de um polinômio por outro polinômio não é possível, quando o primeiro têrmo de um resto qualquer não é divisível pelo primeiro têrmo do divisor.*

E' claro que esta condição só pode ser verificada no decorrer da operação.

Observação. Não sendo possível dividir um polinômio por outro, indicaremos o quociente em forma de fração. E aparecem assim as frações algébricas.

A fração algébrica é o quociente indicado da divisão de duas expressões algébricas quaisquer.

Em geral, a divisão indicada por uma fração algébrica é impossível.

Exercícios. Série XIX

Efetuar as seguintes divisões, completando o quociente com uma fração algébrica:

1. $(a^5-b^5):(a+b)$

2. $(x^6+64):(x-2)$

3. $(m^4+n^4):(m+n)$

4. $(a^3-5a^2+7a-10):(a-3)$

5. $(m^4-7m^2+15):(m+5)$

6. $(x^4-5x^3+7x^2-8x+5):(x^2-3x+5)$

7. $(a^4-5a^2+7a-15):(a^2+2a-3)$

8. Qual é o polinômio que, dividido por x^2+3x-1, dá um quociente igual a x^3-2x^2+5x-3, sendo o resto igual a $3x+7$?

9. O dividendo é $3x^4+8x^3-7x^2-6x-10$, o quociente é $3x^2-x+11$ e o resto é $45-44x$. Qual é o divisor?

10. Quanto devo subtrair de $x^3-5x^2+7x-10$, para que êste polinômio seja divisível por $x-5$?

11. Quanto devemos subtrair de $a^4-3a^3+4a^2-5a+6$, para que êste polinômio seja divisível por a^2+2a-3?

48. Divisibilidade por x − a. Façamos dois exercícios simples; calcular o valor numérico do polinômio $x^4-2x^3+3x^2-5x+6$, para $x=2$, e dividir o mesmo polinômio por $x-2$. (Os estudantes fazem os dois exercícios em classe.)

A coincidência é interessante; o valor numérico do polinômio dado, para $x=2$, é **8**; o resto da divisão do mesmo polinômio, pelo binômio $x-2$, é também **8!**

Observemos que o polinômio dado é um polinômio inteiro em x e o divisor $x-2$ é um binômio do primeiro grau em relação

a x; dizemos em Matemática que o binômio $x-2$ é um binômio da forma x *menos* **um número qualquer.**

Vamos repetir êste duplo exercício com outro polinômio inteiro em x; por exemplo, com o polinômio $2x^4-5x^3+x^2+2x-7$. Calculemos o seu valor numérico, para $x=3$, e dividamo-lo por $x-3$. (Os estudantes fazem também êstes dois exercícios em classe.)

A mesma coincidência! O valor numérico do polinômio dado, para $x=3$, é 35; o resto da divisão do polinômio dado, por $x-3$, também é 35!

Diante destas duas coincidências temos vontade de afirmar que:

O resto da divisão de um polinômio inteiro em x, *por um binômio da forma* x *menos um número qualquer, é igual ao valor que o polinômio adquire, quando nele substituímos* x *por êsse mesmo número.*

O que acabámos de afirmar é uma das verdades mais importantes da Matemática, conhecida pelo nome de **teorema de d'Alembert.** Mas, as coincidências nada provam em Matemática; portanto, é necessário demonstrar êste teorema.

Seja $x^4-2x^3+3x^2-5x+1$ um polinômio inteiro em x; seja $x-5$ o divisor, $x^3+3x^2+18x+85$ o quociente, e R o resto.

Por ser o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, e mais o resto, teremos:

$$x^4-2x^3+3x^2-5x+1=(x-5)(x^3+3x^2+18x+85)+R \qquad (1)$$

E' necessário observar que o resto R não contém x porque, se o contivesse, poderíamos dividí-lo por $x-5$, e então R deixaria de ser o resto da divisão. (§ 50)

Ora, a igualdade (1) é uma identidade, isto é, ela se verifica sempre, seja qual for o valor de x. Neste caso, substituindo x por 5, resulta:

$$5^4-2\times5^3+3\times5^2-5\times5+1=(5-5)(5^3+3\times5^2+18\times5+85)+R \;\therefore$$

$$5^4-2\times5^3+3\times5^2-5\times5+1=0\times(5^3+3\times5^2+18\times5+85)+R \qquad (2)$$

No segundo membro desta igualdade temos dois têrmos: o primeiro é $0\times(5^3+3\times5^2+18\times5+85)$; mas êste têrmo é nulo, porque é um produto constituído por dois fatores, um dos quais é zero. Suprimindo-o, então, da igualdade (2), resulta:

$$R=5^4-2\times5^3+3\times5^2-5\times5+1$$

como queríamos demonstrar.

Exercício. Os estudantes devem calcular êste valor de R e, em seguida, verificá-lo pela divisão.

Observação. Quando os autores enunciam o teorema de d'Alembert, não dizem x *menos um número qualquer*; dizem $x-a$, representando por a êsse número qualquer.

Exercícios orais

Completar os seguintes enunciados do teorema de d'Alembert:

1. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em a, por um binômio da forma $a-b$, ...

2. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em m, por um binômio da forma $m-s$, ...

3. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em b, por um binômio da forma $b-$ ......

4. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em c, por um binômio da forma ......

5. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em (?) por um binômio da forma ......

6. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em x, por um binômio da forma $2x-5$ ......

Observação. Substituir $2x$ por 5 é fazer $2x=5 \;\therefore\; x=\frac{5}{2}$. Portanto, quando o divisor é da forma $2x-5$, substituímos $2x$ por 5 ou x por $\frac{5}{2}$; sendo o divisor $3x-2$, substituímos $3x$ por 2 ou x por $\frac{2}{3}$, etc..

Consideremos um polinômio inteiro em x, por exemplo, $x^3-x^2-13x+4$, e calculemos o seu valor numérico para $x=4$.

$$x^3-x^2-13x+4=$$
$$4^3-4^2-13\times4+3=$$
$$64-16-52+4=$$
$$(64+4)-(52+16)=$$
$$68-68=0$$

Feitas as operações, verificamos que, para $x=4$, o valor numérico do polinômio dado é *zero*, isto é, *o polinômio dado se anula, para* $x=4$. Ora, pelo teorema de d'Alembert, o resto da divisão do polinômio $x^3-x^2-13x+4$ pelo binômio $x-4$, é zero. Portanto, êsse polinômio é divisível pelo binômio $x-4$. Logo,

Se um polinômio inteiro em x *se anula pela substituição de* x *por um número qualquer* **a**, *êste polinômio é divisível pelo binômio* **x − a.**

Exercícios. Série XX

Sem efetuar as divisões indicadas, calcular os restos das mesmas.

1. $(a^3+3a^2+5a-10):(a-3)$

2. $(b^5-4b^3+3b):(b-2)$
3. $(c^4-c^3d+cd^3-d^4):(c-d)$
4. $(x^4-4x^3y+7xy^3-y^4):(x-y)$
5. $(m^7-5m^3+2m^2-10):(m-1)$
6. $(r^3+4r^2-7r-15):(r-10)$
7. $(y^4-5y^3+10y^2-15y+20):(y-2)$
8. $(a^4-5a^3x+10a^2x^2-20ax^3+x^4):(a-x)$
9. $(a^4-5a^3+10a^2-12a+20):(2a-1)$
10. $(5x^3-7x^2+10x-25):(2x-3)$

49. Divisibilidade por x + a. Dado um polinômio inteiro em x, por exemplo, $x^3-5x^2+7x-10$, já sabemos como calcular o resto da divisão dêste polinômio, por um binômio da forma **x** menos **um número qualquer;** é bastante substituir a letra x do polinômio dado, *por êste número qualquer*, e calcular o valor numérico da expressão resultante.

Consideremos agora o polinômio $x^3+7x^2+5x+12$. E' possível calcular o resto da divisão dêste polinômio, pelo binômio $x+3$, sem efetuar a divisão? Sim, é possível; observemos que:

$$x+3=x-(-3)$$

E, de acôrdo com o teorema de d'Alembert, para calcular o resto da divisão do polinômio $x^3+7x^2+5x+12$, por um binômio da forma **x** menos **um número qualquer**, o qual, no caso presente, **é o número −3** (menos 3) é bastante substituir a letra x do polinômio dado, pelo número -3, e calcular o valor numérico da expressão resultante.

$$\begin{aligned} x^3+7x^2+5x+12 &= \\ (-3)^3+7(-3)^2+5(-3)+12 &= \\ -27+7\times9+5(-3)+12 &= \\ -27+63-15+12 &= \\ 75-42 &= 33 \end{aligned}$$

O valor numérico do polinômio dado, para $x=-3$, é 33. Portanto, o polinômio dado não é divisível por $x+3$, sendo o resto da divisão igual a 33. Em resumo:

O resto da divisão de um polinômio inteiro em **x**, *por um binômio da forma* **x + a**, *é igual ao valor que o polinômio adquire quando nele substituímos* **x** *por* **− a** *(menos* **a**).

Se um polinômio inteiro em **x** *se anula, pela substituição de* **x** *por* **− a**, *êste polinômio é divisível por* **x + a**.

Exercícios. Série XXI

Sem efetuar as divisões indicadas, calcular os restos das mesmas.

1. $(a^3+3a^2+5a+10):(a+3)$
2. $(b^5+4b^3+3b):(b+2)$
3. $(c^4-c^3d+cd^3-d^4):(c+d)$
4. $(x^4-4x^3y+7xy^3-y^4):(x+y)$
5. $(m^7+6m^3+2m^2+20):(m+1)$
6. $(r^3+4r^2-7r-20):(r+5)$
7. $(a^4+5a^3+7a^2+15a+20):(2a+1)$
8. $(5x^4+7x^3+10x^2+15x+30):(2x+3)$
9. O polinômio $a^6+3a^5+5a^4+8a^3+7a^2+10a+20$ é divisível por $a+2$? Por que? Qual é o resto?
10. Demonstrar que $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$ é divisível por $z+y$.

50. Casos notáveis de divisão algébrica. Em tudo o que se vai seguir, suporemos sempre que o expoente m é um número inteiro e positivo.

Estudemos, agora, os casos notáveis mais simples de divisão algébrica.

I. *A diferença entre potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é sempre divisível pela diferença das bases.*

Vamos demonstrar que a^m-b^m é sempre divisível por $a-b$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a, e o divisor é um binômio da forma $a-b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, teremos:

$$a^m-b^m=b^m-b^m=0$$

$$\begin{array}{l|l} a^5-b^5 & a-b \\ \cline{2-2} -a^5+a^4b & a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ \cline{1-1} \quad +a^4b-b^5 & \\ \quad -a^4b+a^3b^2 & \\ \cline{1-1} \qquad +a^3b^2-b^5 & \\ \qquad -a^3b^2+a^2b^3 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad +a^2b^3-b^5 & \\ \qquad\quad -a^2b^3+ab^4 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad +ab^4-b^5 & \\ \qquad\qquad -ab^4+b^5 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Como exemplo, dividamos a^5-b^5 por $a-b$. A divisão não deixa resto e o quociente tem uma forma fácil de memorizar.

Exercícios orais

Dizer os quocientes das seguintes divisões:

1. $(x^3-y^3) : (x-y)$	5. $(m^4-n^4) : (m-n)$
2. $(x^5-y^5) : (x-y)$	6. $(a^5-1) : (a-1)$
3. $(x^4-1) : (x-1)$	7. $(x^2-y^2) : (x-y)$
4. $(x^3-2^3) : (x-2)$	8. $(a^3-3^3) : (a-3)$

9. $(m^5-2^5) : (m-2)$

II. *A soma de duas potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, não é divisível pela diferença das bases.*

Vamos demonstrar que a^m+b^m não é divisível por $a-b$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a, e o divisor é um binômio da forma $a-b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, teremos:

$$a^m+b^m=b^m+b^m=2b^m$$

Como exemplo, dividamos a^5+b^5 por $a-b$. Verificaremos que a divisão deixa um resto igual a $2b^5$. Quanto ao quociente, $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$, tem uma forma fácil de memorizar.

Observação. Todos os estudantes fazem esta divisão, na classe. Em seguida, o professor mostra-lhes como se pode aproveitar a divisão relativa ao primeiro caso, para exemplificar o segundo; é bastante mudar o sinal do têrmo $-b^5$ do dividendo.

Em relação ao segundo caso, podemos completar o quociente com uma fração algébrica. Por exemplo,

$$\frac{x^5+y^5}{x-y}=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+\frac{2y^5}{x-y}$$

Exercícios orais

Dizer os quocientes completos das seguintes divisões:

1. $(x^3+y^3) : (x-y)$	5. $(m^4+n^4) : (m-n)$
2. $(x^5+y^5) : (x-y)$	6. $(a^5+1) : (a-1)$
3. $(x^4+1) : (x-1)$	7. $(x^2+y^2) : (x-y)$
4. $(x^3+2^3) : (x-2)$	8. $(a^4+3^4) : (a-3)$

9. $(m^5+2^5) : (m-2)$

III. *A diferença entre potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é divisível pela soma das bases, quando o expoente é par.*

Vamos demonstrar que a^m-b^m é divisível por $a+b$, quando o expoente m é par; sendo ímpar, a divisão deixa um resto igual a $-2b^m$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a, e o divisor é um binômio da forma $a+b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, isto é, substituindo a por $-b$, teremos:

$$a^m-b^m=(-b)^m-b^m$$

Sendo m par . . . $(-b)^m-b^m=+b^m-b^m=0$

Sendo m ímpar . . $(-b)^m-b^m=-b^m-b^m=-2b^m$

Como exemplo, dividamos a^4-b^4 por $a+b$ e depois a^5-b^5 por $a+b$; acharemos os seguintes quocientes completos:

$$\frac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3$$

$$\frac{a^5-b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4-\frac{2b^5}{a+b}$$

Como vemos, é fácil memorizar a forma do quociente, observando com atenção que, em relação ao terceiro caso, os têrmos do quociente são alternadamente positivos e negativos.

Observação. Os estudantes devem efetuar as duas divisões, na classe.

Exercícios orais

1. $(x^3-y^3) : (x+y)$	5. $(m^4-n^4) : (m+n)$
2. $(x^5-y^5) : (x+y)$	6. $(a^4-1) : (a+1)$
3. $(x^4-1) : (x+1)$	7. $(x^2-y^2) : (x+y)$
4. $(x^3-2^3) : (x+2)$	8. $(a^4-3^4) : (a+3)$

9. $(m^5-2^5) : (m+2)$

IV. *A soma de duas potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é divisível pela soma das bases, quando o expoente é ímpar.*

Vamos demonstrar que a^m+b^m é divisível por $a+b$, quando o expoente m é ímpar; sendo par, a divisão deixa um resto igual a $+2b^m$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a, e o divisor é um binômio da forma $a+b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, isto é, substituindo a por $-b$, teremos:

$$a^m+b^m=(-b)^m+b^m$$

Sendo m par . . . $(-b)^m+b^m=+b^m+b^m=+2b^m$

Sendo m ímpar . . . $(-b)^m+b^m=-b^m+b^m=0$

Como exemplo, dividamos a^4+b^4 por $a+b$ e depois a^5+b^5 por $a+b$; acharemos os seguintes quocientes completos:

$$\frac{a^4+b^4}{a+b} = a^3-a^2b+ab^2-b^3+\frac{2b^4}{a+b}$$

$$\frac{a^5+b^5}{a+b} = a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$$

Também é fácil memorizar a forma dêstes quocientes, os quais são análogos aos quocientes obtidos no terceiro caso.

Observação. Os estudantes devem efetuar as duas divisões, na classe.

Exercícios orais

1. $(x^3+y^3) : (x+y)$
2. $(x^5+y^5) : (x+y)$
3. $(x^5+1) : (x+1)$
4. $(x^3+2^3) : (x+2)$
5. $(m^4+n^4) : (m+n)$
6. $(a^4+1) : (a+1)$
7. $(x^2+y^2) : (x+y)$
8. $(a^4+3^4) : (a+3)$
9. $(m^5+2^5) : (m+2)$

51. A divisibilidade em Álgebra. Número primo é o número que é divisível sòmente por si mesmo e pela unidade; os números 13, 17, 29, são primos. Número composto é o número que, além de ser divisível por si mesmo e pela unidade, é ainda divisível por um ou mais números diferentes de si mesmo e da unidade; os números 15, 22, 35, são compostos.

De acôrdo com a definição da divisão algébrica (§ 44) um polinômio tem uma infinidade (*) de divisores numéricos. Por exemplo:

$$(a+b+c) : 3 = \frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3} \qquad (x-y) : 5 = \frac{x}{5}-\frac{y}{5}$$

A êstes divisores numéricos daremos o nome de *constantes*.

Por analogia com a classificação dos números em primos e compostos, diremos:

Um polinômio racional e inteiro é primo quando é divisível sòmente por si mesmo e por uma constante. Os polinômios $x-y$, $2a-3b+c$, são primos.

(*) Uma infinidade de divisores significa tantos divisores quantos quisermos.

Um polinômio racional e inteiro é composto quando, além de ser divisível por si mesmo e por uma constante, é ainda divisível por um ou mais polinômios diferentes de si mesmo. Os polinômios m^2-n^2, c^3+d^3, $x^2+2xy+y^2$, $a^2-7a+12$, são compostos.

Observação. As mesmas definições se aplicam com as devidas restrições aos monômios racionais e inteiros.

Decompor um número em fatores primos é transformá-lo em um produto de fatores primos. Por exemplo, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $40 = 2^3 \times 5$, $36 = 2^2 \times 3^2$, etc..

Fatorar uma expressão algébrica é transformá-la em um produto de expressões algébricas. Por exemplo,

$$xy = x \times y \qquad m^2-n^2 = (m+n)(m-n)$$

$$c^3+d^3 = (c+d)(c^2-cd+d^2) \qquad x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$$

$$a^2+7a+12 = (a+3)(a+4)$$

A fatoração algébrica é uma operação, em geral, extremamente difícil. Nestas lições elementares estudaremos apenas os casos mais simples de fatoração, e indispensáveis para que os estudantes possam continuar com facilidade o seu curso de Matemática elementar.

52. Fatoração de um monômio. Neste caso não há dificuldade alguma porque a parte literal do monômio está mostrando quais são os fatores que a constituem; é bastante decompor o coeficiente em seus fatores primos. Por exemplo,

$$5a^2b = 5\times a^2\times b \qquad 6a^3mx^2 = 2\times 3\times a^3\times m\times x^2$$

$$8abc = 2^3\times a\times b\times c \qquad 10xy^3 = 2\times 5\times x^3\times y$$

E' útil observar que uma letra qualquer m pode representar um número primo ou composto; com efeito, m pode ser igual a 7, 10, 13, etc.. Mas, enquanto não dermos a m um valor numérico qualquer, m será um monômio primo, por ser divisível sòmente por si mesmo e por uma constante. Entretanto, o monômio $3m$ é composto porque, além de ser divisível por si mesmo e por uma constante, é também divisível por m; o monômio $5a^2b$ também é composto porque, além de ser divisível por si mesmo e por uma constante, é também divisível por a, a^2, b, $5a$, $5a^2$, $5b$, ab, a^2b e $5ab$.

Para calcular todos os divisores de um monômio, podemos proceder como em Aritmética. (E.M.P.V. § 118)

53. Fatoração de polinômios. Os polinômios que vamos fatorar serão sempre racionais e inteiros, e o nosso fim, fatorando tais polinômios, consistirá em determinar os seus fatores primos, mas com uma restrição: **tais fatores deverão ser polinômios racionais e inteiros,** *não sòmente em relação às letras, como também em relação aos coeficientes.*

Observação. Um ou alguns dos fatores poderão ser monômios.

Consideraremos alguns casos simples.

I. Caso do fator comum. Seja o binômio $15a^2 - 10ab$. Os dois têrmos dêste binômio são divisíveis por $5a$; logo,

$$(15a^2 - 10ab) : 5a = 3a - 2b \qquad \text{(A)}$$

Por ser o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, resulta:

$$15a^2 - 10ab = 5a(3a - 2b) \qquad \text{(B)}$$

Na identidade (B) o primeiro membro é uma *soma algébrica:* $(+15a^2) + (-10ab)$; o segundo membro é um produto: $5a \times (3a - 2b)$. Dizemos então em Álgebra que a expressão $15a^2 - 10ab$ está fatorada e que seus fatores são $5a$ e $3a - 2b$.

Sendo os dois têrmos do binômio $15a^2 - 10ab$, divisíveis por $5a$, dizemos que $5a$ *é um fator comum* aos têrmos do binômio e, quando escrevemos

$$15a^2 - 10ab = 5a(3a - 2b)$$

dizemos que o fator $5a$ **foi pôsto em evidência.** Portanto,

Para pôr um fator em evidência, divide-se a expressão dada por êste fator e escreve-se que a expressão dada é igual ao divisor multiplicado pelo quociente.

Na prática, a identidade (A) é dispensável, escrevendo-se logo a identidade (B).

Exercício. Fatorar o trinômio $3a^2x - 6b^2x + 12x$.

Solução. $3a^2x - 6b^2x + 12x = 3x(a^2 - 2b^2 + 4)$

Exercícios. Série XXII

Fatorar as seguintes expressões:

1. $a^2 - a$	**4.** $6a^2 + 9a - 3$	**7.** $9a - 18ab$	**10.** $x^3y + x^2y$
2. $4 + 4a$	**5.** $5x - 10$	**8.** $x^3y + xy^3 - xy$	**11.** $a^3 - a^2 + a$
3. $ab^2 + ab$	**6.** $a^2b + ab^2$	**9.** $x^2 - 5x$	**12.** $ab - 3abc + a^2b$

Fatorar as seguintes expressões:

13. $5y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 4y$	**14.** $26a^3b - 39a^2b^2 + 52ab^3 - 91ab$
15. $81x^4y - 135x^3y^2 + 243x^2y^3$	**16.** $35abc - 42abd + 49abe - 7ab$
17. $34mn + 51m^2n - 119m^3$	**18.** $x^8y^4 - x^7y^5 + x^6y^6 - x^5y^7$

II. Fatoração por agrupamento. Consideremos a expressão algébrica

$$ac + ad + bc + bd$$

E' um polinômio de quatro têrmos, os quais não têm fator comum. Parece, à primeira vista, que êste polinômio não pode ser fatorado. Entretanto, observando que o fator a é comum aos dois primeiros têrmos, e que o fator b é comum aos dois últimos, podemos escrever:

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd) \quad \therefore$$

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) \qquad \text{(A)}$$

Consideremos o segundo membro da identidade (A), isto é,

$$a(c + d) + b(c + d)$$

Os dois têrmos desta expressão binômia são divisíveis por $c + d$; logo,

$$\frac{a(c+d) + b(c+d)}{c + d} = a + b \quad \therefore$$

$$a(c+d) + b(c+d) = (c+d)(a+b) \qquad \text{(B)}$$

Voltando à identidade (A) e substituindo o segundo membro pela expressão eqüivalente $(c+d)(a+b)$, resulta:

$$ac + ad + bc + bd = (c+d)(a+b)$$

Exercícios-modêlo

1. Fatorar $x^2 - ax - bx + ab$

Solução. $x^2 - ax - bx + ab = (x^2 - ax) - (bx - ab)$

$x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a)$

$x^2 - ax - bx + ab = (x - a)(x - b)$

2. Fatorar $a^3 + a^2 + a + 1$

Solução. $a^3 + a^2 + a + 1 = (a^3 + a^2) + (a + 1)$

$a^3 + a^2 + a + 1 = a^2(a + 1) + (a + 1)$

$a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + 1)$

Exercícios orais

Fatorar as expressões seguintes:

1. $a(x-y)+b(x-y)$
2. $2a(3x-5y)-7b(3x-5y)$
3. $a(b-c)+(b-c)$
4. $(2x-5)-a(2x-5)$
5. $4b(c+d)+5a(c+d)$
6. $x(a-b)+y(b-a)$

Observação. Em relação ao sexto exercício parece, à primeira vista, que os dois têrmos da expressão binômia $x(a-b)+y(b-a)$ não têm fator comum; com efeito, $a-b$ não é o mesmo que $b-a$. Entretanto, com um artifício muito simples, êste fator comum vai aparecer.

Em primeiro lugar observemos que, multiplicando uma expressão algébrica por $(-1)\times(-1)$, ela não se altera; com efeito, $(-1)\times(-1)=+1$ e, se multiplicarmos uma expressão algébrica por 1, ela não muda de valor. Portanto,

$$x(a-b)+y(b-a) = x(a-b)+y(b-a)(-1)(-1)$$
$$x(a-b)+y(b-a) = x(a-b)+y(-1)(b-a)(-1)$$
$$x(a-b)+y(b-a) = x(a-b)-y(a-b)$$
$$x(a-b)+y(b-a) = (a-b)(x-y)$$

Regra. *Em um produto constituído por expressões algébricas, podemos, quando nos convier, mudar o sinal de dois fatores, sem que o valor do produto se altere.*

Exemplos

$$a(b-c)(x-y) = a(c-b)(y-x)$$
$$a(b-c)(x-y) = -a(c-b)(x-y)$$
$$a(b-c)(x-y) = -a(b-c)(y-x)$$

Exercícios. Série XXIII

Fatorar as expressões algébricas seguintes:

1. $ac+ad-bc-bd$
2. $6y-27x^2y-10x+45x^3$
3. $ax-ay-bx+by$
4. $1-p+q-pq$
5. $y^2-4y+xy-4x$
6. $abx-aby+pqx-pqy$
7. $ay-by-ab+b^2$
8. $abcy-b^2dy-acdx+bd^2x$
9. $ab+ay-by-y^2$
10. $2x-y+4x^2-2xy$
11. $x^2-x-a+ax$
12. $bc+bx-cx-x^2$
13. $x^4-a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2$
14. $mx+mn+ax+an$
15. $2x^2+6ax+3bx+9ab$
16. $cdx^2-cxy+dxy-y^2$
17. $cdz^2-cyz+dyz-y^2$
18. x^3+x^2+x+1

III. Caso do trinômio quadrado perfeito. O quadrado de um binômio é sempre um trinômio. (§ 32)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ | $(2x+5)^2 = 4x^2+20x+25$

$(a-3x)^2 = a^2-6ax+9x^2$ | $(2m-3n)^2 = 4m^2-12mn+9n^2$

Entretanto, nem sempre um trinômio é quadrado perfeito. Para que o seja, é necessário que:

a) Dois têrmos sejam quadrados perfeitos.

b) O terceiro têrmo seja o duplo produto das raízes quadradas dos dois têrmos que são quadrados.

Consideremos o seguinte trinômio:

$$25a^2 + 60ab + 36b^2$$

O primeiro e o terceiro têrmos são quadrados perfeitos, cujas raízes são $5a$ e $6b$. Ora, $2\times5a\times6b = 60ab$. Portanto, o segundo têrmo, $60ab$, é o duplo produto das raízes quadradas dos têrmos $25a^2$ e $36b^2$. E concluímos que o trinômio

$$25a^2 + 60ab + 36b^2$$

é o quadrado do binômio $5a+6b$. Podemos então escrever:

$$25a^2 + 60ab + 36b^2 = (5a+6b)^2$$

Fica assim o trinômio $25a^2+60ab+36b^2$ transformado em um produto de dois fatores, a saber $(5a+6b)\times(5a+6b)$.

Se o trinômio dado fosse $25a^2-60ab+36b^2$ escreveríamos:

$$25a^2-60ab+36b^2 = (5a-6b)^2$$

Consideremos agora o trinômio

$$25a^2 + 40ab + 36b^2$$

Êste trinômio não é um quadrado perfeito porque não existe um binômio que, elevado ao quadrado, o reproduza. Se êste binômio existisse, deveria ser formado pelas raízes quadradas dos têrmos $25a^2$ e $36b^2$; portanto, seria $5a+6b$. Ora,

$$(5a+6b)^2 = 25a^2 + 60ab + 36b^2$$

Regra. *Para fatorar um trinômio que é quadrado perfeito, extrai-se a raiz quadrada dos dois têrmos que são quadrados, e ligam-se estas duas raízes com o sinal do têrmo que não é quadrado.*

Exemplo. Fatorar o trinômio $16x^2-24xy+9y^2$.

$$\sqrt{16x^2} = 4x \qquad \sqrt{9y^2} = 3y$$

$$16x^2-24xy+9y^2 = (4x-3y)^2$$

Observação. *O primeiro passo, ao iniciar a fatoração de um polinômio, é verificar se êle contém um fator comum e, no caso afirmativo, pô-lo imediatamente em evidência.*

Exercícios. Série XXIV

Dizer se os trinômios que se seguem são ou não são quadrados perfeitos e justificar as respostas.

1. $a^2+4ab+4b^2$
2. $4x^2-12xy+9y^2$
3. a^2-2a+1
4. $49c^2-24cd+16d^2$
5. m^2+mn+n^2
6. $a^2+2ab+b^2$
7. $a^2+2ab-b^2$
8. $x^2+10x+25$
9. $a^4+2a^2b^2+b^2$

Nos trinômios que se seguem, substituir o ponto de interrogação por um têrmo tal que o trinômio seja um quadrado perfeito.

10. $x^2-(?)+y^2$
11. $16a^2-(?)+9b^2$
12. $x^2+(?)+196$
13. $9x^2y^4-(?)+25z^4$
14. $a^2-8a+(?)$
15. $(?)+2x+1$
16. $(?)+4x^2y^2+4y^4$
17. $4a^2+(?)+9b^2$
18. $x^2+(?)+36$
19. $4a^4+(?)+9b^4$
20. $x^2-(?)+400$
21. $y^4-20y^2+(?)$
22. $(?)-4ab+4b^2$
23. $(?)-2abcd+c^2d^2$
24. $(?)+12ab+b^2$

Fatorar os trinômios que se seguem.

25. $x^2+14x+49$
26. $m^2-12m+36$
27. x^2-4x+4
28. $1+18x+81x^2$
29. $r^2-12r+36$
30. a^2+6a+9
31. $a^2-10a+25$
32. $a^2-200a+10\,000$
33. $r^2+10rs+25s^2$
34. x^2-2x+1
35. $x^2-8x+16$
36. $a^4-2a^2b^2+b^4$
37. $x^2+8x+16$
38. $m^2-12m+36$
39. $x^4+2x^2y^2+y^4$

IV. Caso da diferença de dois quadrados. Já aprendemos que (§ 32):

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Reciprocamente,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Regra. *Para fatorar uma diferença entre dois quadrados, extrai-se a raiz de cada quadrado; a soma das duas raízes é o primeiro fator, e a diferença das mesmas raízes é o segundo fator.*

Ou, ainda:

A diferença entre dois quadrados é igual à soma das raízes dos dois quadrados, multiplicada pela diferença das mesmas raízes.

Exemplo. Fatorar o binômio $3a^2-9b^2$

$$\sqrt{3a^2}=2a \qquad \sqrt{9b^2}=3b$$

$$4a^2-9b^2=(2a+3b)(2a-3b)$$

Exercícios. Série XXV

Fatorar os binômios seguintes:

1. a^2-b^2
2. $16x^2-y^2$
3. $25x^2-36y^2$
4. $4x^2-4y^2$
5. ac^2-ad^2
6. a^2x-4x
7. $9x^2-4y^2$
8. a^2-4
9. a^4-1
10. $4x^2-25$
11. $36a^4-49y^2$
12. a^2-1
13. x^2-1
14. x^2-25
15. x^2-9
16. $4c^2-1$
17. $25a^4-16$
18. $4-x^2$
19. $9-4a^2$
20. $1-25a^2$
21. $49a^2-100b^2$
22. $4a^2-b^2$
23. $3a^4-3$
24. $4ax^2-25a$
25. a^6-b^6
26. a^4-81
27. a^2m-m
28. mx^2-m
29. ax^2-25a
30. $100x^2-121y^2$
31. a^4-b^4
32. x^4-1
33. $81a^4-16$
34. $2a^4x-2b^4x$
35. $81-c^4$
36. $10\,000c^4d^4-1$
37. $625x^4-16y^4$
38. $3bm^4-3bn^4$
39. $x^4y^8-z^4$
40. $a^4b^4c^4-1$
41. $16x^4-1$
42. $5c^4-5$

V. Caso do trinômio do segundo grau. As expressões algébricas

$$x^2-7x+12 \qquad y^2-8y+15 \qquad z^2+9z+20$$

são chamadas *trinômios do segundo grau*. Com efeito, cada uma destas expressões é um trinômio porque se compõe de três têrmos; é do segundo grau porque o têrmo de grau mais elevado é do segundo grau.

Chama-se trinômio do segundo grau o trinômio que contém uma letra (uma variável) a qual figura nos três têrmos do trinômio com os expoentes **dois, um e zero.**

Não esqueçamos que os três trinômios dados se podem escrever:

$$x^2-7x^1+12x^0 \qquad y^2-8y^1+15y^0 \qquad z^2+9z^1+20z^0$$

Em geral, êstes trinômios provêm da multiplicação de dois binômios da forma **x − a** e **x − b.** (§ 32) Já vimos como se multi-

plicam dois binômios desta forma; o que vamos fazer agora é o inverso, isto é, dado um trinômio do segundo grau, por exemplo, $\mathbf{a^2 + 10a + 21}$, determinar os dois binômios que, sendo multiplicados um pelo outro, o reproduzem.

Consideremos o trinômio $a^2+11a+30$. Em primeiro lugar escrevemos:

$$a^2+11a+30 = (a+?)(a+?)$$

O primeiro têrmo de cada um dos fatores binômios é a; os dois segundos têrmos devem ser dois números tais que sua soma seja $+11$, e seu produto, $+30$. (§32, 6.ª fórmula) E' fácil verificar que êstes dois números são 5 e 6. Logo,

$$a^2+11a+30 = (a+5)(a+6)$$

Seja o trinômio $x^2-7x+12$. Escreveremos:

$$x^2-7x+12 = (x+?)(x+?)$$

A soma dos segundos têrmos é -7, e o produto, $+12$.

Se o produto dos segundos têrmos é $+12$, segue-se que os *segundos têrmos são ambos positivos ou ambos negativos.* Mas a soma dos segundos têrmos é -7; logo, os dois são negativos. E facilmente descobriremos que os dois números cuja soma é -7 e cujo produto é $+12$, são os números -3 e -4. Portanto,

$$x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$$

Seja o trinômio $x^2+2x-15$. Escreveremos:

$$x^2+2x-15 = (x+?)(x+?)$$

O produto dos segundos têrmos é -15; logo, *um dêles é positivo, e o outro, negativo.* Mas a soma é $+2$; logo, o têrmo maior, em valor absoluto, é o positivo. E podemos escrever:

$$x^2+2x-15 = (x+?)(x-?)$$

Os fatores de 15 são 15 e 1 ou 5 e 3. Ora, os fatores 15 e 1 não servem porque $(+15)+(-1) = +14$. Considerando os fatores 5 e 3, teremos: $(+5)+(-3) = +2$. Portanto,

$$x^2+2x-15 = (x+5)(x-3)$$

Finalmente, considerando o trinômio $m^2-3m-28$, teremos:

$$m^2-3m-28 = (m+?)(m+?)$$
$$m^2-3m-28 = (m-?)(m+?)$$
$$m^2-3m-28 = (m-7)(m+4)$$

Exercícios. Série XXVI

Fatorar os trinômios seguintes:

1. $x^2+11x+24$	**9.** b^2-7b+6	**17.** $x^2-8x+12$
2. $x^2-7x+10$	**10.** $a^2+11a-12$	**18.** $y^2-7y-18$
3. x^2+6x-7	**11.** $m^2-9m-36$	**19.** $x^2+5x-84$
4. $x^2-3x-28$	**12.** $x^2-8x-20$	**20.** $d^2+21d+110$
5. $m^2+13m+12$	**13.** c^2+3c+2	**21.** $y^2-7y+12$
6. a^2+5a+6	**14.** $x^2-17x+30$	**22.** $a^2+5a-14$
7. $a^2-8a+12$	**15.** $m^2-13m+30$	**23.** a^2+a-42
8. $c^2+7c+12$	**16.** $x^2-16x+15$	**24.** $a^2+2a-35$

25. $a^2x^2+14abx+33b^2$	**29.** $m^4n^4+20m^2n^2pq+51p^2q^2$
26. $x^4-4a^2x^2+3a^4$	**30.** $a^2+29ab+100b^2$
27. $a^4b^6-11a^2b^3+30$	**31.** $x^2y^2z^2+9xyz-22$
28. $y^2-15ay+50a^2$	**32.** a^8+15a^4-100

No caso de fatoração que estamos explicando, isto é, no caso em que a expressão algébrica que queremos fatorar é um trinômio do segundo grau, *nem sempre o coeficiente do têrmo do segundo grau é a unidade.*

Consideremos o trinômio $4x^2+13x+3$. Para fatorá-lo, vamos recorrer a um artifício.

Multiplicando-o e dividindo-o por 4, **coeficiente de $\mathbf{x^2}$**, seu valor não se altera. Portanto,

$$4x^2+13x+3 = \frac{16x^2+13\times 4x+12}{4}$$

Sendo $16x^2$ um quadrado perfeito, podemos escrever:

$$4x^2+13x+3 = \frac{(4x)^2+13\times 4x+12}{4}$$

Fazendo $4x = m$, no segundo membro,

$$4x^2+13x+3 = \frac{m^2+13m+12}{4}$$

Fatorando o trinômio $m^2+13m+12$,

$$4x^2+13x+3 = \frac{(m+12)(m+1)}{4}$$

Substituindo m pelo seu valor $4x$,

$$4x^2+13x+3 = \frac{(4x+12)(4x+1)}{4}$$

Pondo 4 em evidência, no binômio $4x + 12$,

$$4x^2+13x+3 = \frac{4(x+3)(4x+1)}{4}$$

Simplificando,

$$4x^2+13x+3 = (x+3)(4x+1)$$

Exercícios. Série XXVII

1. Fatorar o trinômio $2x^2+5x+3$.
Sugestão. Multiplicar e dividir por 2.

2. Fatorar o trinômio $3x^2-x-10$.
Sugestão. Multiplicar e dividir por 3.

Fatorar os trinômios seguintes:

3. $5x^2-38x-16$	**9.** $11a^2-23ab+2b^2$	**15.** $2a^2-5ab+2b^2$
4. $6a^2+7a-5$	**10.** $6x^2+5x-4$	**16.** $2+x-15x^2$
5. $3a^2+8a+5$	**11.** $12x^2-5x-2$	**17.** $9a^2+3a-2$
6. $6a^2+7a-20$	**12.** $3x^2+7x+2$	**18.** $4a^2+8a+3$
7. $10x^2+13x-3$	**13.** $4x^2+11x-3$	**19.** $12a^2-7a+1$
8. $8a^2+14ab-15b^2$	**14.** $2a^2-13ab+6b^2$	**20.** $3a^2-2a-5$

Observação. Mais tarde, quando estudarmos as equações do segundo grau, aprenderemos uma regra geral para fatorar o trinômio do segundo grau da forma ax^2+bx+c.

VI. Caso da soma ou diferença de dois cubos. Consideremos os binômios

$$a^3-b^3 \qquad a^3+b^3$$

Já sabemos que:

$$(a^3-b^3) : (a-b) = a^2+ab+b^2 \quad (\S\,50,\ 1.^\circ \text{ caso})$$
$$(a^3+b^3) : (a+b) = a^2-ab+b^2 \quad (\S\,50,\ 4.^\circ \text{ caso})$$

Portanto,

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Exercícios. Série XXVIII

Fatorar os seguintes binômios:

1. $8a^3-27b^3$

Solução.

$$8a^3-27b^3 = (2a)^3-(3b)^3$$
$$8a^3-27b^3 = (2a-3b)\left[(2a)^2+2a\times3b+(3b)^2\right]$$
$$8a^3-27b^3 = (2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$$

2. $8a^3+27b^3$	**6.** $a^3+b^3c^3$	**10.** $64+y^3$	**14.** a^3+64b^3
3. a^3-8	**7.** a^6-b^6	**11.** $27+8x^3$	**15.** a^3-125b^3
4. $8+x^3$	**8.** x^3+8	**12.** $125x^3-y^3z^3$	**16.** $8a^3b^3-1$
5. b^3-64	**9.** $8x^3-125$	**13.** x^6+y^6	**17.** $a^3b^3-c^3d^3$

VII. Caso do trinômio $a^4+a^2b^2+b^4$. Neste trinômio, os têrmos a^4 e b^4 são quadrados perfeitos. Entretanto, o trinômio não é um quadrado perfeito, porque o duplo produto das raízes dos dois têrmos quadrados é $2a^2b^2$ e o têrmo do meio do trinômio $a^4+a^2b^2+b^4$ é a^2b^2. Ora, é evidente que o trinômio não se altera, se lhe somarmos a^2b^2 e, em seguida, subtrairmos a^2b^2. Teremos:

$$a^4+a^2b^2+b^4 = a^4+a^2b^2+b^4+a^2b^2-a^2b^2$$
$$a^4+a^2b^2+b^4 = a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+b^2)^2-a^2b^2$$
$$a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$
$$a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

Portanto, para fatorar um trinômio da forma $a^4+a^2b^2+b^4$, é necessário somar-lhe e subtrair-lhe um têrmo tal que o trinômio fique transformado em uma diferença de quadrados.

Exercícios. Série XXIX

Fatorar os seguintes trinômios:

1. $4a^4-37a^2b^2+9b^4$

N. B. Escrever $-12a^2b^2-25a^2b^2$ em lugar de $-37a^2b^2$.

2. $9a^4+21a^2b^2+25b^4$ (Somar e subtrair $9a^2b^2$)

3. $49x^4-15x^2y^2+121y^4$ (Somar e subtrair $169x^2y^2$)

4. $9a^4+3a^2b^2+4b^4$	**5.** $4x^4-37x^2y^2+9y^4$
6. $16x^4-17x^2y^2+y^4$	**7.** $9a^4+38a^2b^2+49b^4$

VIII. Caso da soma ou diferença de duas potências com expoentes iguais e bases diferentes. Procederemos de vários modos.

1. Fatorar o binômio a^4-b^4. De acôrdo com o quarto caso de fatoração, teremos:

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

2. Fatorar o binômio a^5-b^5. Lembrando o primeiro caso notável de divisão algébrica (§ 50), teremos:

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

3. Fatorar o binômio a^6-b^6. De acôrdo com o quarto caso de fatoração, resulta:

$$a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$

Mas os binômios a^3+b^3 e a^3-b^3 podem ser fatorados, de acôrdo com o sexto caso de fatoração. Logo,

$$a^6-b^6=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

4. Fatorar o binômio a^7-b^7. Lembrando o primeiro caso notável de divisão algébrica, teremos:

$$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$$

5. Fatorar o binômio a^8-b^8.

$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)$$
$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$
$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

6. Fatorar o binômio a^9-b^9,

$$a^9-b^9=(a^3)^3-(b^3)^3$$
$$a^9-b^9=(a^3-b^3)\left[(a^3)^2+a^3b^3+(b^3)^2\right]$$
$$a^9-b^9=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$$

7. Fatorar o binômio $a^{10}-b^{10}$.

$$a^{10}-b^{10}=(a^5+b^5)(a^5-b^5)$$

E, fatorando os dois binômios do segundo membro (§ 50) teremos:

$$a^{10}-b^{10}=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

Em resumo, para fatorar binômios da forma a^m-b^m, é necessário recorrer ao quarto e sexto casos de fatoração algébrica, e aos casos notáveis de divisão algébrica.

Entretanto, nem sempre é possível fatorar binômios da forma a^m+b^m. Em primeiro lugar, lembremos que êste binômio nunca é divisível por $a-b$, e é divisível por $a+b$, quando m é ímpar.

1. Fatorar o binômio a^3+b^3. Pelo sexto caso de fatoração, teremos:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

2. Fatorar o binômio a^4+b^4. Não é possível. (§ 50)

3. Fatorar o binômio a^5+b^5.

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

4. Fatorar o binômio a^6+b^6.

$$a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3$$
$$a^6+b^6=(a^2+b^2)\left[(a^2)^2-a^2b^2+(b^2)^2\right]$$
$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$$

Em resumo, para fatorar binômios da forma a^m+b^m, temos de recorrer ao sexto caso de fatoração e ao quarto caso notável de divisão algébrica.

Exercícios variados de fatoração. Série XXX

Fatorar as seguintes expressões algébricas:

1. $cdx^2+adxy-bcxy-aby^2$
2. $121a^4-286a^2y+169y^2$
3. $81a^4+23a^2b^2+16b^4$
4. $a^2x+9abx+8b^2x$
5. $a^2m-15am-100m$
6. $(x+1)^2-(y-1)^2$
7. $4x^2+13x+3$
8. $64a^3-1\,000b^3$
9. $a^2+2ax+x^2+4a+4x$
10. $(x^2-x-6)(x^2-x-20)$
11. $(x-y)(x^2-a^2)-(x-a)(x^2-y^2)$
12. $4-x^2-2x^3-x^4$
13. $x^3-3xy-2x^2y^3+6y^4$
14. $(ax+by)^2-1$
15. $ax^2-2axy+ay^2-az^2$
16. $3ay^2+51ay+180a$
17. $5a^2-115a+660$
18. $3a^2-6ab+3b^2-3x^2$
19. $a^{10}-9a^5-10$
20. a^3x^3+216
21. $(a+b)^3-c^3$
22. a^2-b^2-a-b
23. $49(x-y)^2-25(a-b)^2$
24. x^3-x^2+x-1
25. $2x^2+13x+18$
26. $7x(2x-5y)-2y(2x-5y)+(5y-2x)$

54. **Máximo divisor comum.** *Máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número que os divide, sem deixar resto.* (E.M.P.V. §§ 99 a 107 ; § 120)

Há, em Aritmética, dois processos distintos para calcular o m. d. c. de dois números:

a) *o das divisões sucessivas.*

b) *o da decomposição em fatores primos.*

O segundo consiste em *decompor os números dados em seus fatores primos, tomar os fatores primos comuns a êstes mesmos números, com os seus menores expoentes, e multiplicá-los.* O produto obtido é o m. d. c. dos números dados. Podemos então dizer que:

O m. d. c. de dois ou mais números é o produto dos fatores primos comuns a êstes mesmos números, **cada um dêles tomado com o seu menor expoente.**

Vejamos agora como proceder para calcular o m. d. c. de duas expressões algébricas racionais e inteiras.

Primeiro exemplo. $D(3a^2b,\ 6ab^2c,\ 10abd) = ?$

Fatorando os três monômios, teremos:

$$3a^2b = 3 \times a^2 \times b$$
$$6ab^2c = 2 \times 3 \times a \times b^2 \times c$$
$$10abd = 2 \times 5 \times a \times b \times d$$

E observando que os fatores comuns aos três monômios são a e b, podemos escrever:

$$D(3a^2b,\ 6ab^2c,\ 10abd) = ab$$

Observação. Para provar que ab é o m. d. c. dos três monômios dados, podemos fazer um raciocínio idêntico ao que fizemos no livro E.M.P.V. § 120.

Segundo exemplo. $D(6a^3b^2,\ 9a^2b^4c,\ 12a^5b^3d) = ?$

$$6a^3b^2 = 2 \times 3 \times a^3 \times b^2$$
$$9a^2b^4c = 3^2 \times a^2 \times b^4 \times c$$
$$12a^5b^3d = 2^2 \times 3 \times a^5 \times b^3 \times d$$
$$D(6a^3b^2,\ 9a^2b^4c,\ 12a^5b^3d) = 3a^2b^2$$

Terceiro exemplo. $D(16x^2 - y^2,\ 12x - 3y) = ?$

$$16x^2 - y^2 = (4x+y)(4x-y)$$
$$12x - 3y = 3(4x-y)$$
$$D(16x^2 - y^2,\ 12x - 3y) = 4x - y$$

Dêstes três exemplos concluímos que:

O m. d. c. de duas ou mais expressões algébricas racionais e inteiras, é o produto dos fatores primos comuns a estas mesmas expressões, cada um dêles tomado com o seu menor expoente.

Exercícios. Série XXXI

Calcular o m. d. c. das seguintes expressões:

1. $x^2y,\ xy^2$
2. $3ab,\ 5bc$
3. $2xy,\ 4ab$
4. $6a^3b,\ 9ab^3$
5. $xy^2z^3,\ x^3yz^2$
6. $5a^4b,\ 15a^3c$
7. $7a^4b^4,\ 14a^3b^4$
8. $25xyz,\ 30x^3y$
9. $9m^4n,\ 15n^2r$
10. $4abc,\ 6a^2bd,\ 8a^3be$
11. $7x^2yz,\ 14x^2y^2z,\ 21xy^3z^3$
12. $22m^4n^3,\ 33m^3n^4r,\ 44m^5n^6s$
13. $5(a-b)c,\ 10(a-b)d,\ 15(a-b)e$
14. $2a(x-y)^2,\ 3a^2(x-y)^3,\ 5a^3(x-y)^4$
15. $(a+b)^2(x-y),\ (a+b)^3(x+y)$
16. $6(a-b)^3(x-y),\ 9(a-b)^4(x-y)^2$
17. $3(a-b+c),\ 6(a-b+c)d,\ 9(a-b+c)m$
18. $(2a-3)b,\ (2a-3)b^2,\ (2a-3)b^3$
19. $x^2-y^2,\ x^2+2xy+y^2$
20. $x^2-y^2,\ x+y,\ x-y.$
21. $2a^2-2a,\ 4a-4,\ 6a^2-6$
22. $3x^2y^3-3y^5,\ 2x^2-2xy,\ 12x^3y-12x^2y^2$
23. $a-x,\ a^2-x^2,\ a^3-x^3$
24. $7x^2-4x,\ 7a^2x-4a^2,\ 14mx-8m$
25. $a^2-2ab+b^2,\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\ 5a-5b$
26. $2a^2-2b^2,\ 6a^2-6b^2,\ 8(a+b)(a-b)$
27. $a^2-a,\ a^2-2a+1,\ a^2-1$
28. $ac+ad+bc+bd,\ 2ax+2bx,\ a^2-b^2$
29. $a^2+4ab+4b^2,\ a^2-4b^2,\ 5a+10b$
30. $16x^2-y^2,\ 20ax+5ay,\ 16x^2+8xy+y^2$

55. M. D. C. pelo processo das divisões sucessivas. Em geral, não é fácil calcular o m. d. c. de duas ou mais expressões algébricas, pela sua decomposição em fatores primos; neste caso, é forçoso recorrer ao processo das divisões sucessivas.

A pesquiza do m. d. c. de polinômios pelo processo das divisões sucessivas é, na maioria dos casos, trabalhosa. Daremos aqui apenas exemplos muitos simples.

Em primeiro lugar, é necessário recordar algumas verdades já aprendidas. (E.M.P.V. §§ 100 a 107) E também é útil lembrar que o m. d. c. de dois números não se altera, se um dêles é mul-

tiplicado ou dividido por um número que não seja fator comum aos dois números dados. Por exemplo, considerando os monômios a^3b^2c, e a^2bd, teremos:

$$\begin{array}{ll|ll} D\,(a^3b^2c, & a^2bd) = a^2b & D\,(a^3b^2c, & a^2bd) = a^2b \\ D\,(a^3b^2, & a^2bd) = a^2b & D\,(a^3b^2c^2, & a^2bd) = a^2b \\ D\,(a^3b^2c, & a^2b) = a^2b & D\,(a^3b^2c, & a^2bd^2) = a^2b \end{array}$$

Primeiro exemplo. Calcular o m. d. c. dos seguintes polinômios:

$$2x^2+x-3 \qquad\qquad 4x^3+8x^2-x-6$$

Aquí não é possível dizer que *vamos dividir o polinômio maior pelo menor* porque, em se tratando de expressões algébricas, não se pode dizer qual seja *a maior das duas;* isto só é possível depois de calcular o valor numérico das expressões dadas, para cada valor arbitrário de x. *O que vamos fazer é dividir o polinômio de grau mais elevado pelo outro.*

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+8x^2-x-6 & 2x^2+x-3 \\ \hline -4x^3-2x^2+6x & 2x+3 \\ \hline 6x^2+5x-6 & \\ -6x^2-3x+9 & \\ \hline +2x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x^2+x-3 & 2x+3 \\ \hline -2x^2-3x & x-1 \\ \hline -2x-3 & \\ +2x+3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Resposta. O m. d. c. dos polinômios dados é $2x+3$.

Neste exemplo não há dificuldades; o processo das divisões sucessivas foi aplicado tal qual como em Aritmética.

Segundo exemplo. Calcular o m. d. c. dos seguintes polinômios:

$$4x^2-8x-5 \qquad\qquad 12x^2-4x-65$$

Os dois polinômios são do mesmo grau; neste caso, convém tomar como dividendo o polinômio no qual a mais alta potência de x tem maior coeficiente.

$$\begin{array}{r|l} 12x^2-4x-65 & 4x^2-8x-5 \\ \hline -12x^2+24x+15 & 3 \\ \hline 20x-50 & \end{array}$$

Ora, o m. d. c. dos polinômios dados é igual ao m. d. c. de $4x^2-8x-5$ e do resto da divisão, isto é, $20x-50$. Portanto,

$$D\,(4x^2-8x-5,\ 12x^2-4x-65) = D\,(4x^2-8x-5,\ 20x-50)$$

Vamos então calcular o m. d. c. dos polinômios $4x^2-8x-5$ e $20x-50$.

Mas, $20x-50 = 10(2x-5)$. E como o fator 10 não pertence ao polinômio $4x^2-8x-5$, êste fator 10 pode ser suprimido, sem que o m. d. c. dos dois polinômios se altere. Logo,

$$D\,(4x^2-8x-5,\ 20x-50) = D\,(4x^2-8x-5,\ 2x-5)$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^2-8x-5 & 2x-5 \\ \hline -4x^2+10x & 2x+1 \\ \hline +2x-5 & \\ -2x+5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Resposta. O m. d. c. dos polinômios dados é $2x-5$.

A disposição prática destas operações pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{r|r|l} & 3 & 2x+1 \\ 12x^2-4x-65 & 4x^2-8x-5 & 2x-5 \\ \hline -12x^2+24x+15 & -4x^2+10x & \\ \hline +20x-50 & +2x-5 & \\ 10\,(2x-5) & -2x+5 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Resposta. $D\,(4x^2-8x-5,\ 12x^2-4x-65) = 2x-5$.

Terceiro exemplo. Calcular o m. d. c. dos polinômios seguintes:

$$8x^2+2x-3 \qquad\qquad 6x^3+5x^2-2$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+5x^2-2 & 8x^2+2x-3 \\ \times\ 4 & 3x+7 \\ \hline 24x^3+20x^2-8 & \\ -24x^3-6x^2+9x & \\ \hline +14x^2+9x-8 & \\ \times\ 4 & \\ \hline +56x^2+36x-32 & \\ -56x^2-14x+21 & \\ \hline +22x-11 & \\ 11\,(2x-1) & \end{array}$$

O polinômio de grau inferior não contém o fator 4; isto nos permite multiplicar o polinômio $6x^3+5x^2-2$ por 4, e tornar possível a divisão.

O ultimo resto contém o fator 11, que não pertence ao polinômio $8x^2+2x-3$; neste caso

$$
\begin{array}{r|l}
8x^2+2x-3 & 2x-1 \\
\cline{2-2}
-8x^2+4x & 4x+3 \\
\cline{1-1}
+6x-3 & \\
-6x+3 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

podemos suprimir o fator 11.

Resposta. O m. d. c. dos polinômios dados é $2x-1$.

Exercícios. Série XXXII

Calcular o m. d. c. dos polinômios seguintes:

1. $3a^3-5a^2x-2ax^2$ e $9a^3-8a^2x-20ax^2$.

Os dois polinômios são divisíveis por a; podemos suprimir êste fator, contanto que o m. d. c. que vamos calcular seja multiplicado por a. Procuremos então o m. d. c. dos polinômios $3a^2-5ax-2x^2$ e $9a^2-8ax-20x^2$.

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 3 & 3a+x \\
9a^2-8ax-20x^2 & 3a^2-5ax-2x^2 & a-2x \\
\hline
-9a^2+15ax+6x^2 & -3a^2+6ax & \\
\cline{1-2}
+7ax-14x^2 & +ax-2x^2 & \\
7x(a-2x) & -ax+2x^2 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Resposta. $D(3a^3-5a^2x-2ax^2,\ 9a^3-8a^2x-20ax^2) =$
$= (a-2x)\times a = a^2-2ax$

2. $6a^4+25a^3-21a^2+4a,\quad 24a^4+112a^3-94a^2+18a$

3. $10x^3+x^2-9x+24,\quad 20x^4-17x^2+48x-3$

4. $2x^3-4x^2-13x-7,\quad 6x^3-11x^2-37x-20$

5. $12x^3-9x^2+5x+2,\quad 24x^2+10x+1$

56. Mínimo múltiplo comum. *Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que se divide por êstes dois ou mais números, sem deixar resto.* (E.M.P.V. §§ 121 e 122)

Vejamos como se calcula o m. m. c. de duas ou mais expressões algébricas.

Primeiro exemplo. $M(3a^2b,\ 6ab^2c,\ 10abd) = ?$

Fatorando os três monômios, teremos:

$$
\begin{aligned}
3a^2b &= 3\times a^2\times b \\
6ab^2c &= 2\times 3\times a\times b^2\times c \\
10abd &= 2\times 5\times a\times b\times d
\end{aligned}
$$

Tomando todos os fatores comuns e não comuns aos três monômios, cada um dêles com o seu maior expoente, e multiplicando-os, teremos:

$$
\begin{aligned}
M(3a^2b,\ 6ab^2c,\ 10abd) &= 2\times 3\times 5\times a^2\times b^2\times c\times d \\
&= 30a^2b^2cd
\end{aligned}
$$

Para provar que $30a^2b^2cd$ é o m. m. c. dos três monômios dados, podemos fazer um raciocínio idêntico ao que fizemos no livro E.M.P.V. § 121.

E concluímos que, para calcular o m. m. c. de números ou de expressões algébricas, a regra é a mesma.

Segundo exemplo. $M(16x^2-y^2,\ 12x-3y) = ?$

$$
\begin{aligned}
16x^2-y^2 &= (4x+y)(4x-y) \\
12x-3y &= 3(4x-y) \\
M(16x^2-y^2,\ 12x-3y) &= 3(4x+y)(4x-y)
\end{aligned}
$$

Observação. E' conveniente deixar o m. m. c. fatorado.

Dêstes dois exemplos concluímos que:

O m. m. c. de duas ou mais expressões algébricas racionais e inteiras é o produto dos fatores primos comuns e não comuns a estas mesmas expressões, cada um dêles tomado com o seu maior expoente.

Exercícios. Série XXXIII

Calcular o m. m. c. das seguintes expressões:

1. $x^2y,\ xy^2$	**4.** $6a^3b,\ 9ab^3$	**7.** $7a^4b^4,\ 14a^3b^4$
2. $3ab,\ 5bc$	**5.** $xy^2z^3,\ x^3y^2z$	**8.** $15xyz,\ 10x^3y^2$
3. $2xy,\ 4ab$	**6.** $5a^4b,\ 15a^3c$	**9.** $15m^4n,\ 9n^2r$

10. $a(2b-5),\ a^2(2b-5),\ 3a(2b-5)^2$

11. $x^2-y^2,\ x+y,\ x-y$

12. $a^2+2ab+b^2,\ (a+b)^3,\ 5(a+b)$

13. $x^2-7x+12,\ x-4,\ x-3$

14. $3a(x^2-y^2),\ 6b(x+y),\ 9c(x-y)$

15. $(a-b)^3,\ a^2-2ab+b^2,\ a-b$

CAPÍTULO IV

Frações Algébricas

57. Definição. Dadas duas expressões algébricas A e B, se a expressão A não for divisível pela expressão B, indicaremos a divisão pelo símbolo $\frac{A}{B}$, símbolo êste que é chamado *fração algébrica.* (§ 47) As expressões A e B são chamadas respectivamente **numerador** e **denominador** da fração algébrica; ambas são os **têrmos** da mesma fração.

Os têrmos de uma fração algébrica podem ser expressões *racionais* ou *irracionais.* (§ 25). No primeiro caso a fração algébrica **é racional;** no segundo, **irracional.**

Todas as propriedades que se aplicam às frações ordinárias e às razões (geométricas) se aplicam também às frações algébricas. Demonstraremos apenas a seguinte:

Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os têrmos de uma fração algébrica por uma mesma quantidade diferente de zero, o valor da fração algébrica não se altera.

Seja $\frac{A}{B}$ a fração dada e, Q, o seu valor; teremos:

$$\frac{A}{B} = Q \quad \therefore \quad A = BQ$$

Multiplicando-se ambos os membros da segunda igualdade por m ($m \neq 0$) resulta: $Am = BQm$

Dividindo ambos os membros desta última igualdade por Bm, teremos:

$$\frac{Am}{Bm} = Q$$

Porém,........... $Q = \frac{A}{B}$. Logo,

$$\frac{A}{B} = \frac{Am}{Bm}$$

Agora suponhamos que $m = \frac{1}{n}$. Neste caso, teremos:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{A}{n}}{\frac{B}{n}}$$

isto é, *dividindo-se ambos os membros de uma fração algébrica por uma mesma quantidade* **n** *(diferente de zero) seu valor não se altera.*

58. Simplificação das frações algébricas. Para simplificar uma fração algébrica, dividem-se ambos os têrmos pelo seu m. d. c.

Primeiro exemplo. Simplificar a fração $\frac{25a^3b^2x}{35a^2bx}$.

$$D\,(25a^3b^2x,\ 35a^2bx) = 5a^2bx$$

$$\frac{25a^3b^2x}{35a^2bx} = \frac{25a^3b^2x \div 5a^2bx}{35a^2bx \div 5a^2bx} = \frac{5ab}{7}$$

Segundo exemplo. Simplificar a fração $\frac{20x^2yz^2}{50x^3y^2z}$.

Recorrendo ao método das divisões sucessivas, teremos:

$$\frac{20x^2yz^2}{50x^3y^2z} = \frac{2x^2yz^2}{5x^3y^2z} = \frac{2x^2yz}{5x^3y^2} = \frac{2x^2z}{5x^3y} = \frac{2z}{5xy}$$

Recorrendo ao método do m. d. c., teremos:

$$D\,(20x^2yz^2,\ 50x^3y^2z) = 10x^2yz$$

$$\frac{20x^2yz^2}{50x^3y^2z} = \frac{20x^2yz^2 \div 10x^2yz}{50x^3y^2z \div 10x^2yz} = \frac{2z}{5xy}.$$

Terceiro exemplo. Simplificar a fração $\frac{a^2-6a+8}{a^2-5a+6}$.

Fatorando-se os dois têrmos da fração, resulta:

$$\frac{a^2-6a+8}{a^2-5a+6} = \frac{(a-4)(a-2)}{(a-3)(a-2)} = \frac{a-4}{a-3}$$

Exercícios. Série XXXIV

Simplificar as frações algébricas seguintes:

1. $\dfrac{a}{a^2+ab}$ 3. $\dfrac{x^2-xy}{x}$ 5. $\dfrac{m^2}{mn+m^2}$ 7. $\dfrac{ab}{a^2-ab}$

2. $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$ 4. $\dfrac{a^2-ab}{a-b}$ 6. $\dfrac{m+n}{m^2-n^2}$ 8. $\dfrac{a-5}{a^2-25}$

9. $\dfrac{ax+ay}{x^2+2xy+y^2}$ 10. $\dfrac{a-5}{a^2-10a+25}$ 11. $\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}$

12. $\dfrac{a-b}{b^2-a^2}$ 13. $-\dfrac{x^2-y^2}{y-x}$ 14. $\dfrac{4x^2-y^2}{y-2x}$

15. $\dfrac{a^2-12a+11}{a^2-a}$ 17. $\dfrac{4x^2-9}{4x^2-12x+9}$ 19. $\dfrac{9x^2-y^2}{9x^2+6xy+y^2}$

16. $\dfrac{x^2-3x-54}{x^2-18x+81}$ 18. $\dfrac{x^3-3x^2-4x}{x^3-8x^2+16x}$ 20. $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

59. Redução de frações algébricas ao mesmo denominador. Procede-se como em Aritmética. (E.M.P.V. § 130)

Primeiro exemplo. Reduzir ao mesmo denominador as seguintes frações:

$\dfrac{3a}{8b}$	$\dfrac{5b}{12c}$	$\dfrac{7c}{18a}$	$8b = 2^3\times b$
			$12c = 2^2\times 3\times c$
$(9ac)$	$(6ab)$	$4bc$	$18a = 2\times 3^2\times a$
$\dfrac{27a^2c}{72abc}$	$\dfrac{30ab^2}{72abc}$	$\dfrac{28bc^2}{72abc}$	M.M.C. $= 2^3\times 3^2\times a\times b\times c$
			M.M.C. $= 72abc$

Segundo exemplo. Reduzir ao mesmo denominador as seguintes frações:

$\dfrac{3a}{2a+2}$	$\dfrac{4a}{7a-7}$	$\dfrac{5a}{3a^2-3}$	$2a+2 = 2(a+1)$
			$7a-7 = 7(a-1)$
$21(a-1)$	$6(a+1)$	(14)	$3a^2-3 = 3(a+1)(a-1)$
$\dfrac{63a(a-1)}{42(a^2-1)}$	$\dfrac{24a(a+1)}{42(a^2-1)}$	$\dfrac{70a}{41(a^2-1)}$	M.M.C. $= 42(a+1)(a-1)$

Exercícios. Série XXXV

Reduzir ao mesmo denominador as seguintes frações:

1. $\dfrac{3}{5xy^2},\ \dfrac{7}{4x^2y},\ \dfrac{9}{10x^2y^2}$

2. $\dfrac{3a-5}{5},\ \dfrac{5a-7}{6},\ \dfrac{2a+3}{9},\ \dfrac{6a-11}{10}$

3. $\dfrac{7b}{12x^2},\ \dfrac{a}{15xy},\ \dfrac{3ab}{30y^2},\ \dfrac{10a^2b^2}{18x^2y^2}$

4. $\dfrac{7a}{5a^2-5b^2},\ \dfrac{8a}{3a+3b},\ \dfrac{10a}{2a-2b}$

5. $\dfrac{a+3}{a-2},\ \dfrac{2a-1}{2a-4},\ \dfrac{5a+2}{3a-6},\ \dfrac{3a-5}{5a-10}$

6. $\dfrac{7x}{a-b},\ \dfrac{8x}{b^2-a^2},\ \dfrac{10x}{a+b}$

7. $\dfrac{2x}{x^2-2xy+y^2},\ \dfrac{3y}{x^2+2xy+y^2},\ \dfrac{5xy}{x^2-y^2}$

8. $\dfrac{3}{5x-5},\ \dfrac{4}{3x-3},\ \dfrac{5}{2x^2-2}$

9. $\dfrac{a}{x^2+7x+12},\ \dfrac{b}{x^2+4x+3},\ \dfrac{c}{x^2+5x+4}$

10. $\dfrac{5}{x^2-x-6},\ \dfrac{2}{x^2-2x-3},\ \dfrac{4}{x^2+3x+2}$

60. Adição e subtração de frações algébricas. Procede-se como em Aritmética.

Exercícios. Série XXXVI

1. $\dfrac{2a-3}{5}+\dfrac{5-3a}{6}-\dfrac{a-4}{10}=$

2. $\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{2a-3b}{3b}+\dfrac{4a^2-3b^2}{6ab}=$

3. $\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{3(2-x)}{5}+\dfrac{4(2x-3)}{10}=$

4. $\dfrac{3a^2-5x+5}{4a^2} - \dfrac{4a^2-5x-3}{3a^2} + \dfrac{5a-8}{5a} =$

5. $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{4}{b^2-a^2} =$

6. $\dfrac{3}{1+a} - \dfrac{4}{1-a} + \dfrac{5}{1+a^2} - \dfrac{6}{1-a^2} =$

7. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b} - \dfrac{2a^3-a^2+b^2}{a^2-b^2} + \dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b} =$

8. $\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a} =$

9. $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{7}{x^2-x-6} =$

10. $\dfrac{5}{2a(a-1)} + \dfrac{4}{3a(a-2)} - \dfrac{3}{4a(a^2-3a+2)} =$

11. $\dfrac{3}{5+x} - \dfrac{4}{5-x} + \dfrac{2x}{25-x^2} =$

12. $\dfrac{3a}{5b} - \dfrac{b}{2(a+b)} + \dfrac{5a^2}{a(a+b)} =$

61. Multiplicação e divisão de frações algébricas. Procede-se como em Aritmética. Antes, porém, de multiplicar duas ou mais frações algébricas, é aconselhável suprimir os fatores comuns a ambos os têrmos das frações dadas.

Primeiro exemplo. Simplificar a expressão

$$\frac{45(x-y)}{32(z+y)} : \frac{27(x-y)}{128b(z+y)} = \frac{45(x-y)}{32(z+y)} \times \frac{128b(z+y)}{27(x-y)}$$

Cancelando os fatores comuns aos dois têrmos das frações, isto é, 9, 32, $x-y$ e $z+y$, e multiplicando os fatores não cancelados, teremos $\dfrac{20b}{3}$, que é a forma mais simples da expressão dada.

Segundo exemplo. Simplificar a expressão

$$\frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1} \times \frac{a^2+4a+4}{a^2-4a+4} \times \frac{a^2-3a+2}{a^2+3a+2}$$

Fatorando todos os trinômios, e indicando a multiplicação, teremos:

$$\frac{(a+1)(a+1)(a+2)(a+2)(a-2)(a-1)}{(a-1)(a-1)(a-2)(a-2)(a+2)(a+1)}$$

Cancelando todos os fatores comuns aos dois têrmos desta fração, isto é, $a+1$, $a-1$, $a+2$ e $a-2$, teremos:

$$\frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a-2)} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2+3a+2}{a^2-3a+2}$$

que é a forma mais simples da expressão dada.

Exercícios. Série XXXVII

1. $21a^2y \times \dfrac{9ay^2}{14x^8} \times \left(\dfrac{2x}{3y^2}\right)^3 =$

2. $\left(\dfrac{a}{5c^2}\right)^2 \times \left(\dfrac{-c}{2d}\right)^2 \times \dfrac{15d}{ac} =$

3. $\dfrac{3x^2y}{4xz^2} \times \dfrac{5y^2z}{6xy} \times \dfrac{12x^2}{2xy^2} \times \left(-\dfrac{x^3y}{yz}\right) =$

4. $\dfrac{x-y}{x^2+xy} \times \dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy} : \dfrac{x}{x-y} =$

5. $\dfrac{3a^2+3b^2}{5a^2-5b^2} : \dfrac{6a-6b}{5a+5b} =$

6. $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-15} \times \dfrac{a-4}{2a^3-8a^2} \times \dfrac{2a^2x-10a^2}{x^2-6x+9} =$

7. $\dfrac{10-4a}{12x^2} : \dfrac{5a-2a^2}{9x} : \dfrac{6}{5} =$

8. $\dfrac{a^2+3a-10}{a^2+2a-3} \times \dfrac{a^2+7a+12}{a^2-9a+14} \times \dfrac{a-1}{a+4} =$

9. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} \times \dfrac{x^2-6x+7}{x^2-8x+15} \times \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-7x+10} =$

10. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{x^2+xy+y^2} : \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \times \dfrac{a-b}{x-y} =$

11. $\left(\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{a+b}{a-b}\right) : \left(\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{a+b}{a-b}\right) =$

12. $\dfrac{x^2(x+y)}{y^2z^2} \times \dfrac{y^2(y+z)}{x^2z^2} \times \dfrac{z^2(z+x)}{x^2y^2} =$

CAPÍTULO V

Equações do Primeiro Grau

62. **Definições.** Já definimos a igualdade. (E.M.P.V. § 70)

Equação é uma igualdade na qual entram letras. Por exemplo, as igualdades

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (1)$$
$$3x-5=2x+5 \qquad (2)$$

são equações. Entretanto, em relação a estas duas equações, há uma diferença essencial. Na equação (1) as letras a e b que nela figuram, podem receber valores quaisquer. Com efeito, esta equação é a primeira fórmula de multiplicação algébrica (§ 32) e, portanto, sejam quais forem os valores numéricos atribuídos às letras a e b, nós já sabemos que o valor numérico da expressão $(a+b)^2$, será sempre igual ao valor numérico da expressão $a^2+2ab+b^2$. E' necessário, bem entendido, que, se fizermos $a=5$ e $b=7$ no primeiro membro da equação, também no segundo membro façamos $a=5$ e $b=7$.

Entretanto, na equação (2) já não é possível atribuir à letra x um valor qualquer. Façamos $x=4$ e teremos $7=13$, o que não é verdade. Entretanto, se fizermos $x=10$, teremos $25=25$, o que é verdade. Portanto, considerando as equações (1) e (2), *podemos atribuir às letras* **a** *e* **b** *da primeira, valores quaisquer, porque o valor numérico do primeiro membro será sempre igual ao do segundo ; ao passo que, não podemos atribuir à letra* **x** *da segunda, um valor qualquer, porque nem sempre o valor numérico do primeiro membro será igual ao do segundo.*

Para distinguir a equação (1) da equação (2) diremos que a equação (1) é uma **equação idêntica** e a equação (2) é uma **equação condicional.**

Equação idêntica *é uma equação que se verifica sempre, sejam quais forem os valores numéricos atribuídos às letras que nela figuram.*

Equação condicional *é uma equação que se verifica sòmente para certos e determinados valores atribuídos às letras que nela figuram.*

No decorrer destas lições as *equações idênticas* serão chamadas **identidades**, e as *equações condicionais*, **equações.** (*)

Observação. As igualdades numéricas entram na categoria das identidades.

Exercícios. Série XXXVIII

N. B. Para verificar uma identidade efetuam-se as operações indicadas nos dois membros.

Verificar as identidades seguintes:

1. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

2. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

3. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

4. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)=a^6-b^6$

5. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$

6. $(a-b)(b-c)(c-a)=ac(a-c)-ab(a-b)-bc(b-c)$

63. Incógnitas e raízes. Consideremos as equações seguintes:

$$3x-1=2 \qquad 5-2x=1 \qquad 4x-1=11 \qquad 2x-7=3$$

Qual o valor que convém a x, em cada uma destas equações? E' fácil verificar que na primeira é 1, na segunda é 2, na terceira é 3 e na quarta é 5.

Entretanto, nem sempre é possível descobrir o valor de x com esta facilidade; por exemplo, na equação

$$\frac{4+x}{4}+\frac{x-1}{7}=7-\frac{23-x}{5} \qquad (1)$$

qual o valor de x? Para descobrí-lo, é necessário *resolver a equação*.

(*) Esta é a lição de G. A. Wentworth, em seu excelente compêndio *A Higher Algebra*; é também a lição de Paul R. Rider Ph. D. da Universidade de Washington, em seu livro recentíssimo *College Algebra*, 3.ª edição, maio de 1942, pág. 20.

Incógnitas *de uma equação são as letras que nela figuram e que não podem receber valores quaisquer.*

Raízes *de uma equação são os valores numéricos* (*ou literais*, quando a equação é literal) *que convêm à incógnita.*

Resolver uma equação *é descobrir as suas raízes.*

Suponhamos que, tendo resolvido a equação (1) achamos que a raiz desta equação é 8. Vejamos o que acontece, voltando à equação (1) e substituindo x por 8:

$$\frac{4+8}{4}+\frac{8-1}{7}=7-\frac{23-8}{5} \quad \therefore \quad 3+1=7-3 \quad \therefore \quad 4=4$$

Chegámos a uma identidade. Para verificar se um certo valor numérico (ou literal), a, é a raiz de uma equação dada, substituímos a incógnita x por a. Se desta substituição resulta uma identidade, o valor numérico (ou literal), a, é raiz da equação; no caso contrário, a não é raiz da equação.

64. Eqüações eqüivalentes. Duas equações são eqüivalentes quando têm as mesmas raízes, não sendo possível terem uma raiz diferente.

Assim, para demonstrar que duas equações são eqüivalentes, é necessário provar que tôda solução da primeira satisfaz a segunda e recìprocamente.

Compreende-se portanto que, sob o ponto de vista da resolução, podemos substituir uma equação por outra eqüivalente.

De um modo geral, para resolver uma equação, transformamos a mesma em equações eqüivalentes sucessivamente mais simples, até obtermos uma equação de raiz evidente, como, por exemplo,

$$x=3$$

cuja raiz 3 é evidente.

Estas transformações são baseadas em certos princípios, denominados *Princípios de eqüivalência*, que passamos a estudar.

65. Princípios de eqüivalência. Primeiro. *Somando-se a ambos os membros de uma equação ou dêles subtraindo-se uma mesma quantidade, resulta uma equação eqüivalente à primeira.*

Demonstração. Seja a equação

$$A = B \qquad (1)$$

onde A e B são polinômios contendo as incógnitas. Somemos aos dois membros a expressão algébrica C. Obteremos a equação

$$A + C = B + C \qquad (2)$$

E' fácil provar que as equações (1) e (2) são eqüivalentes.

1.º) *Toda raiz da equação (1) é raiz da equação (2).*

Realmente, seja $x = a$ e $y = b$, uma solução da equação (1). Assim, se substituirmos x por a e y por b, os polinômios A e B assumem valores numéricos iguais A_1 e B_1, e teremos:

$$A_1 = B_1$$

Porém, pela mesma substituição, a expressão C assumirá um valor numérico C_1 e como, a dois números iguais somando números iguais obtém-se números iguais, podemos concluir:

$$A_1 + C_1 = B_1 + C_1$$

Esta última igualdade prova que a solução considerada satisfaz a equação (2).

2.º) *Toda raiz da equação (2) é raiz da equação (1).*

Seja $x = a_1$ e $y = b_1$ uma solução da equação (2). Se substituirmos na equação (2) x por a_1 e y por b_1, os polinômios A, B e C, assumirão valores numéricos A_2, B_2 e C_2, e teremos:

$$A_2 + C_2 = B_2 + C_2$$

Se, dos dois membros desta igualdade numérica subtrairmos o mesmo número C_2, obteremos resultados iguais; logo, teremos:

$$A_2 = B_2$$

igualdade que prova ser a solução considerada também da equação (1).

As equações (1) e (2) admitem, pois, as mesmas soluções, e são eqüivalentes.

Segundo. *Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma equação por uma quantidade constante e diferente de zero, resulta uma equação eqüivalente à primeira.*

Demonstração. Seja a equação

$$A = B \qquad (1)$$

e m, uma quantidade constante e diferente de zero. Trata-se de provar que a equação (1) é eqüivalente à equação

$$Am = Bm \qquad (2)$$

1.º) *Toda solução da equação (1) satisfaz a equação (2).*

Realmente a equação (1) pode ser escrita

$$A - B = 0$$

e a equação (2) com a forma

$$Am - Bm = 0$$

ou,

$$m(A - B) = 0$$

Ora, toda solução da equação (1) anula o polinômio A — B e, como o produto que tem um fator nulo é igual a zero, anulará também o polinômio

$$m(A - B)$$

e satisfará, portanto, a equação (2).

2.º) *Toda solução da equação (2) satisfaz a equação (1).*

Realmente, toda solução da equação (2) anula o produto

$$m(A - B)$$

e, como m é, por hipótese, diferente de zero, anulará também o polinômio

$$A - B$$

e verificará, consequentemente, a equação (1).

Assim, as equações (1) e (2) são eqüivalentes.

Observação. O mesmo princípio pode ser aplicado à divisão, pois dividir por m é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{m}$.

66. Restrições ao segundo princípio. I. Não podemos multiplicar ambos os membros de uma equação por zero, *porque a equação resultante não será eqüivalente à primeira.*

Considerando, por exemplo, a equação $x - 3 = 7$, e multiplicando ambos os membros desta equação por *zero*, teremos :

$$x - 3 = 7 \qquad (A)$$

$$(x - 3) \times 0 = 7 \times 0 \qquad (B)$$

A raiz da equação A é 10, e êste número é também raiz da equação B. Mas, se observarmos atentamente a equação B, verificaremos imediatamente **que esta equação tem uma infinidade de raízes**; com efeito, substituindo, na equação B, a incógnita x por um número qualquer, por exemplo, 8, teremos:

$$(8-3)\times 0=7\times 0 \quad \therefore \quad 0=0$$

O mesmo acontecerá se substituirmos x por qualquer outro número 9, 11, 13, 20, 50, etc.. Obteremos sempre uma identidade. Portanto, as equações A e B não são eqüivalentes, porque a equação A é realmente uma equação e tem sòmente uma raiz, ao passo que a equação B é uma identidade.

II. **Multiplicando-se ambos os membros de uma equação por uma expressão que contenha a incógnita**, *a equação resultante não será, em geral, eqüivalente à primeira*, porque, além das raízes da equação dada, a nova equação *talvez* tenha outras, que se dizem *raízes extranhas* à primeira.

Considerando, por exemplo, a equação $x-3=7$, e multiplicando ambos os membros desta equação por $x-5$, teremos:

$$x-3=7 \qquad \text{(C)}$$

$$(x-3)(x-5)=7(x-5) \qquad \text{(D)}$$

A raiz da equação C é 10, e êste número é também raiz da equação D, como é fácil verificar.

Mas a equação D admite a raiz 5; com efeito,

$$(5-3)(5-5)=7(5-5) \quad \therefore \quad 2\times 0=7\times 0 \quad \therefore \quad 0=0$$

Ora, a equação C não admite a raiz 5; com efeito, tomando a equação C e substituindo x por 5, teremos:

$$5-3=7 \quad \therefore \quad 2=7, \text{ o que não é verdade.}$$

Portanto, as equações C e D não são eqüivalentes.

E' útil observar que a nova raiz que aparece na equação D é justamente o valor de x *que anula* o multiplicador $x-5$, isto é, que reduz êste binômio a zero.

Se multiplicarmos ambos os membros da equação C por $x+8$, a equação resultante não será eqüivalente à equação C, porque conterá uma raiz que não convém à equação C, e esta raiz será -8, isto é, o valor de x *que anula* o multiplicador $x+8$.

Se multiplicarmos ambos os membros da equação C por $2x-6$, a equação resultante não será eqüivalente à equação C porque terá uma raiz que não convém à equação C, e esta raiz será 3, isto é, o valor de x *que anula* o multiplicador $2x-6$.

Enfim, multiplicando-se ambos os membros de uma equação por uma expressão algébrica que contenha x, por exemplo... $5x^2-7x+3$, a nova equação em geral não é eqüivalente à primeira, porque tem raízes que não convêm à primeira, e estas raízes são as raízes da equação $5x^2-7x+3=0$.

Do exposto se conclue que:

Multiplicando-se ambos os membros de uma equação (A), *por uma expressão que contenha* x, *é indispensável verificar se as raízes obtidas pela resolução da equação* (B), *convêm realmente à equação* (A).

Entretanto, esta verificação é inútil, quando as raízes obtidas não anulam a expressão pela qual foram multiplicados ambos os membros da equação. Por exemplo, se ambos os membros de uma equação foram multiplicados por $x-5$, e se a raiz que se obteve é 4, pode-se afirmar que 4 é, realmente, a raiz da equação dada, porque 4 não anula a expressão $x-5$.

III. **Não podemos dividir ambos os membros de uma equação por zero.** A divisão por *zero* não tem sentido; com efeito, não é possível dividir um número qualquer, por exemplo, 7, por *zero*, porque não existe um número que, multiplicado por *zero*, dê 7.

IV. **Dividindo-se ambos os membros de uma equação por uma expressão que contenha a incógnita**, *a equação resultante não será, em geral, eqüivalente à primeira.*

Acontece justamente o contrário do que foi explicado no parágrafo anterior. No caso da multiplicação, a equação resultante tem, *em alguns casos*, raízes que não convêm à equação dada, *raízes estranhas*, isto é, raízes que não verificam esta equação. No caso da divisão, a equação resultante pode ter, *em alguns casos*, menor número de raízes que a equação primitiva; a divisão faz com que a equação dada perca, às vêzes, uma ou algumas das suas raízes.

Consideremos, por exemplo, a equação do segundo grau

$$x^2-7x+12=0 \qquad \text{(A)}$$

Esta equação tem duas raízes, a saber, 3 e 4, como é fácil verificar por substituição. Dividindo-lhe ambos os membros por $x-3$, teremos:

$$x-4=0 \qquad \text{(B)}$$

E as equações A e B não são eqüivalentes, porque ambas admitem a raiz 4, mas a equação B não admite a raiz 3. Com a divisão de ambos os membros por $x-3$, a equação A perde a raiz 3, *e esta raiz perdida é justamente a raiz que anula o divisor* $x-3$.

67. Resolução de uma equação. Armados com os dois princípios estudados nos parágrafos anteriores, passemos à resolução de algumas equações.

Primeiro exemplo. Resolver a equação $3x-15=5+2x$.

Observemos que o primeiro membro desta equação tem dois têrmos, um dos quais contém x (o têrmo $3x$) e o outro não contém x (o têrmo 15). O mesmo acontece com o segundo membro da equação.

E' conveniente passar para o primeiro membro, todos os têrmos que contêm x, e para o segundo, os que não o contêm, isto é, *os têrmos conhecidos ou têrmos independentes da incógnita.* De que modo?

$$3x-15=5+2x \qquad \text{(A)}$$

Diminuindo $2x$ de ambos os membros da equação A, (princípio da subtração) resulta:

$$3x-15-2x=5+2x-2x \qquad \text{(B)}$$

As equações A e B são eqüivalentes e, notando que no segundo membro da equação B temos $+2x-2x=0$, resulta:

$$3x-15-2x=5 \qquad \text{(C)}$$

Somando 15 a ambos os membros da equação C, (princípio da adição) resulta:

$$3x-15-2x+15=5+15 \qquad \text{(D)}$$

As equações A, B, C e D são eqüivalentes e, notando que no primeiro membro da equação D temos $-15+15=0$, resulta:

$$3x-2x=5+15 \qquad \text{(E)}$$

Reduzindo os têrmos semelhantes,

$$x=20 \qquad \text{(F)}$$

Qual é a raiz da equação F? E' 20, evidentemente. E as equações A, B, C, D, E e F, sendo eqüivalentes, conclue-se que a raiz da equação A é 20. Com efeito, substituindo x por 20, na equação A, teremos:

$$3\times20-15=5+2\times20 \quad \therefore \quad 60-15=5+40 \quad \therefore \quad 45=45$$

Observando com atenção o processo seguido para resolver a equação A, podemos concluir que:

Resolver uma equação é transformá-la em outras eqüivalentes, porém de forma cada vez mais simples, até chegar a uma equação cuja raiz seja evidente.

Comparemos as equações A e E.

$$3x-15=5+2x \qquad \text{(A)}$$

$$3x-2x=5+15 \qquad \text{(E)}$$

Examinando-as com atenção, observamos que o têrmo conhecido -15 do primeiro membro da equação A está no segundo membro da equação E, *porém com sinal contrário, isto é, positivo*; observamos também que o têrmo $+2x$ do segundo membro da equação A, está no primeiro membro da equação E, *porém com sinal contrário, isto é, negativo.* Podemos, então, estabelecer a seguinte

Regra. *E' sempre possível passar um têrmo de um para outro membro de uma equação,* **contanto que se lhe troque o sinal.**

E' o que se chama a *transposição de um têrmo.*

Segundo exemplo. Resolver a equação $5x-(8-2x)=10+6x$

Eliminando os parênteses	$5x-8+2x=10+6x$
Reduzindo os têrmos semelhantes . . .	$7x-8=10+6x$
Transpondo	$7x-6x=10+8$
Reduzindo os têrmos semelhantes . . .	$x=18$

Observação. Antes de transpor têrmos, é conveniente reduzir os têrmos semelhantes existentes em cada membro da equação.

Terceiro exemplo. Resolver a equação $3x-5=4x+9$

Transpondo	$3x-4x=9+5$
Reduzindo	$-x=14$

A incógnita se apresenta nesta última equação com o sinal negativo. Sempre que isto acontece, é de rigor multiplicar ambos

os membros da equação por *menos 1*, o que é permitido de acôrdo com o princípio da multiplicação; resultará:

$$x = -14$$

A raiz da equação dada é -14. Com efeito, substituindo x por -14, teremos:

$$3(-14) - 5 = 4(-14) + 9 \therefore -42 - 5 = -56 + 9 \therefore -47 = -47$$

Fica então estabelecido que:

Estando uma equação completamente simplificada, se o têrmo que contém x (o primeiro membro da equação) é negativo, é necessário multiplicar ambos os membros da equação por menos um.

Na prática diremos: *trocando os sinais . . .*

Quarto exemplo. Resolver a equação

$$10 - (3x+5) + 7x = 5x - (2 - 4x) + 22$$

Eliminando os parênteses . $10 - 3x - 5 + 7x = 5x - 2 + 4x + 22$
Reduzindo . . . . $4x + 5 = 9x + 20$
Transpondo . . . . $4x - 9x = 20 - 5$
Reduzindo . . . . $-5x = 15$
Trocando os sinais . . . . $5x = -15$
Dividindo por 5 . . . . . $x = -3$

Observação. Chegados à equação $5x = -15$, tivemos de dividir ambos os membros por 5, o que é permitido em virtude do princípio da divisão.

Quinto exemplo. Resolver a equação

$$3(2x - 5) - 4(7 - 3x) = 13 - 3x$$

Eliminando os parênteses. . . . $6x - 15 - 28 + 12x = 13 - 3x$
Reduzindo . . . . $18x - 43 = 13 - 3x$
Transpondo . . . . $18x + 3x = 13 + 43$
Reduzindo . . . . $21x = 56$
Dividindo por 21 . . . . $x = \frac{56}{21} \therefore x = \frac{8}{3}$

Exercícios. Série XXXIX

Resolver as seguintes equações:

1. $16 + 4x - 4 = x + 12$
2. $6x - 13 + 2x + 3 = 0$
3. $8 + 7x - 13 = x - 27 - 5x$
4. $9x + 2 - (4x + 5) = 4x + 3$
5. $3x + 8 - (6x - 7) = 2x + 15$
6. $2x - 3 - (4x - 2) = 5x + 4 - (3x + 1)$
7. $4(6x - 10) - 2x = 6x - 40$
8. $3(2 - x) - 5(7 - 2x) = 10 - 4x + 5$

9. $3x - 2(4 - x) = 7 - 3x$
10. $5x - 4 = 7x + 10$
11. $5x + 18 = 3x + 38$
12. $9x + 17 = 102 - 8x$
13. $31 - 7x = 41 - 8x$
14. $29x - 57 = 16x - 5$
15. $25x + 7 = 177 - 9x$
16. $5x + 13 - 2x = 100 - 20x - 18$
17. $9x + 22 - 2x = 193 - 22x - 84$
18. $9x + 15 - 2x = 100 - 12x - 31 + x$
19. $16x + 10 - 21x = 45 - 10x - 15$
20. $4x + 3 + 5x + 11 - 8 = -5x - 8$
21. $2(x - 3) - 3(1 - 2x) = 3(2 - x) - 2(5 - 3x)$
22. $(3x - 4) - \left[2 - (x - 4)\right] = (3x - 4) - 2$
23. $2x - \left[x + (1 - x)\right] = 2x - (1 + x)$

68. Equações com denominadores numéricos. O primeiro passo consiste em eliminar os denominadores. Como exemplo, vamos resolver a seguinte equação:

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{5} - \frac{5x}{6}$$

E' necessário eliminar os denominadores. Com êste fim multiplicamos ambos os membros da equação por um número que seja divisível por 2, 4, 5 e 6. Há uma infinidade de números divisíveis por 2, 4, 5 e 6; devemos preferir o menor múltiplo comum a êstes quatro números, isto é, 60. Multiplicando ambos os membros da equação dada por 60 teremos:

$$\frac{x \times 60}{2} - \frac{3 \times 60}{4} = \frac{2 \times 60}{5} - \frac{5x \times 60}{6}$$

$$x \times 30 - 3 \times 15 = 2 \times 12 - 5x \times 10$$

$$30x - 45 = 24 - 50x, \text{ etc..}$$

Entretanto, na prática, se procede mais ràpidamente. Observemos que:

$$\frac{x}{2} \times 60 = 60 \times \frac{x}{2} = 60 \div 2 \times x = 30x$$

$$\frac{3}{4} \times 60 = 60 \times \frac{3}{4} = 60 \div 4 \times 3 = 45$$

$$\frac{2}{5} \times 60 = 60 \times \frac{2}{5} = 60 \div 5 \times 2 = 24$$

$$\frac{5x}{6} \times 60 = 60 \times \frac{5x}{6} = 60 \div 6 \times 5x = 50x$$

Donde se deduz a seguinte

Regra. *Para eliminar os denominadores de uma equação, calcula-se o menor múltiplo comum dêstes denominadores; em seguida, divide-se êste menor múltiplo comum pelo denominador de cada têrmo, e multiplica-se o quociente pelo numerador correspondente. Se um têrmo não tem denominador, dá-se-lhe mentalmente o denominador um.*

Primeiro exemplo. Resolver a equação

$$\frac{4+x}{4}+\frac{x-1}{7}=7-\frac{23-x}{5} \qquad \text{(A)}$$

O m. m. c. dos denominadores é 140. Aplicando a regra para a sua eliminação, teremos:

$$35(4+x)+20(x-1)=140\times 7-28(23-x) \qquad \text{(B)}$$
$$140+35x+20x-20=980-644+28x \qquad \text{(C)}$$
$$55x+120=28x+336$$
$$55x-28x=336-120$$
$$27x=216$$
$$x=8$$

Segundo exemplo. Resolver a equação

$$4x-7=\frac{2x}{3}+\frac{4x+3}{5} \qquad \text{(A)}$$

O menor múltiplo comum dos denominadores é 15. Aplicando a regra para a sua eliminação, teremos:

$$15\times 4x-15\times 7 = 5\times 2x+3(4x+3) \qquad \text{(B)}$$
$$60x-105 = 10x+12x+9 \qquad \text{(C)}$$
$$60x-105 = 22x+9$$
$$60x-22x = 9+105$$
$$38x = 114$$
$$x = 3$$

Observação. Quando o numerador da fração é um polinômio, o estudante deve indicar primeiramente a multiplicação, e depois efetuá-la. Resolvendo a equação A, passará para a equação B, e depois para a equação C. Se quiser passar diretamente da equação A para a equação C, arriscar-se-á aos erros de sinal, tão comuns entre os principiantes.

Terceiro exemplo. Resolver a equação.

$$\frac{4x-6}{12}-\frac{3x-8}{4}=\frac{2x-9}{6}-\frac{x-4}{8}$$

O m. m. c. dos denominadores é 24. Eliminando-os, teremos:

$$2(4x-6)-6(3x-8)=4(2x-9)-3(x-4)$$
$$8x-12-18x+48=8x-36-3x+12$$
$$-10x+36=5x-24$$
$$-10x-5x=-24-36$$
$$-15x=-60$$
$$15x=60$$
$$x=4$$

Exercícios. Série XL

Resolver as seguintes equações:

1. $\frac{2x}{3}=\frac{3}{4}$
2. $\frac{x}{7}=\frac{2}{5}$
3. $\frac{1}{4}=\frac{3x}{10}$
4. $\frac{5x}{7}=\frac{1}{2}$
5. $\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$
6. $\frac{x}{3}=\frac{2}{5}+\frac{x}{2}$
7. $\frac{2x}{3}+5=\frac{x}{4}$
8. $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{3}=\frac{1}{10}$
9. $\frac{1}{8}=\frac{x}{2}-\frac{4x}{3}$
10. $\frac{7x}{8}=\frac{3}{10}$
11. $\frac{3}{5}=\frac{1}{4}-\frac{x}{3}$
12. $\frac{3x}{5}=-\frac{1}{4}$

N. B. Em relação ao exercício 12, os estudantes podem escrever $\frac{-1}{4}$ em lugar de $-\frac{1}{4}$. E' útil lembrar que $(+a)\div(-b)=-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$.

13. $(x+7)(x-3)=(x-5)(x-15)$
14. $9x-3(5x-6)+30=0$
15. $(x-2)(7-x)+(x+5)(x+3)-2(x-1)+12=0$
16. $(x+3)^2-(x+2)^2=3x+20$
17. $6x-2(9-4x)+3(5x-7)=10x-(4+16x+35)$
18. $\frac{4+x}{3}-\frac{5+2x}{9}=\frac{8-3x}{2}$
19. $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}=\frac{5x-36}{4}-1$

20. $\dfrac{3x}{8} + \dfrac{5x}{12} - \dfrac{7x}{6} + \dfrac{x}{2} = 3$

21. $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} = \dfrac{x+14}{2} - 2$

22. $\dfrac{8-x}{6} + \dfrac{3x-5}{3} = \dfrac{x+6}{2} - \dfrac{x}{3}$

23. $\dfrac{x-1}{7} + \dfrac{23-x}{5} = 7 - \dfrac{4+x}{4}$

24. $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}+3\right) = x - \dfrac{3}{2}$

25. $\dfrac{5x+3}{8} - \dfrac{3-4x}{3} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{31}{2} - \dfrac{9-5x}{6}$

26. $\dfrac{7x+5}{6} - \dfrac{5x-6}{4} = \dfrac{8-5x}{12}$

27. $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x+3}{3} = 2$

28. $\dfrac{5x+12}{6} - \dfrac{4}{11}(2x+7) + \dfrac{1}{3} = 0$

29. $\dfrac{3}{4}(x-1) + \dfrac{5x-7}{4} = \dfrac{3}{2}$

30. $\dfrac{x-7}{6} + \dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{3x-22}{6}$

31. $\dfrac{5x-11}{4} - \dfrac{5x+3}{19} = \dfrac{41-3x}{5}$

32. $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{17x}{12} = 9 - \dfrac{3}{4}(x+12)$

33. $\dfrac{4x-13}{5} - \dfrac{8x-5}{20} + \dfrac{5x}{2} - 14 = \dfrac{7x}{8} - \dfrac{11x-3}{15}$

34. $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5}{12}$

35. $\dfrac{13-30x}{20} - \dfrac{9-80x}{6} - \dfrac{50x-4}{3} = 0$

36. $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}\right) = \left(x-\dfrac{1}{6}\right)(x+3)$

37. $2 + \dfrac{x-1}{2} = 10 - \dfrac{3x-1}{5}$

69. **Equações literais.** As equações já resolvidas são equações numéricas, porque os coeficientes da incógnita são valores numéricos.

A's vêzes, porém, a equação contém as letras a, b, c, m, n, etc., que não representam incógnitas mas que representam números quaisquer supostos conhecidos. Dá-se a esta equação o nome de *equação literal.* Por exemplo, a equação

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 0$$

é uma equação literal. A incógnita é x; as letras a e b representam números quaisquer supostos conhecidos; são chamadas *constantes arbitrárias.*

As equações literais do 1.º grau se resolvem, obedecendo às mesmas regras estabelecidas para as equações numéricas do 1.º grau.

Primeiro exemplo. Resolver a equação $\dfrac{x-a}{b} + \dfrac{x-b}{a} = 0$

Eliminando os denominadores . $a(x-a)+b(x-b)=0$
Eliminando os parênteses . . . $ax-a^2+bx-b^2=0$
Transpondo . . . . $ax+bx=a^2+b^2$
Pondo x em evidência . . . . $x(a+b)=a^2+b^2$
Dividindo por $a+b$ . . . . . . $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

Segundo exemplo. Resolver a equação $\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{m+n}{m-n}$

Quando uma equação literal se apresenta com a forma de uma proporção, o meio mais simples para eliminar os denominadores é aplicar-lhe o teorema fundamental das proporções. (E.M.S.V. § 61) Assim procedendo com a equação acima, resulta:

$$(x+2)(m-n)=(x-2)(m+n) \quad \therefore$$
$$mx+2m-nx-2n=mx-2m+nx-2n \quad \therefore$$
$$mx-nx-mx-nx=-2m-2n-2m+2n \quad \therefore$$
$$-2nx=-4m \quad \therefore \quad 2nx=4m \quad \therefore \quad x=\frac{4m}{2n} \quad \therefore \quad x=\frac{2m}{n}$$

Exercícios. Série XLI

Resolver as equações literais seguintes:

1. $a + x = a + 5$
2. $4(3b - x) = 3(2b + x)$
3. $x(a - b) = 3(a + b)$
4. $(x - a)(x - b) = x(x + c)$
5. $5(a - 3x) = 2(a + x) - 4x$
6. $(a + b)(a - x) = a(b - x)$
7. $(a^2 + x)^2 = x^2 + 4a^2 + a^4$
8. $3ax - ab = 2ax - ac$
9. $5(x - 2a) + 3(x - a) = 2x$
10. $2a - cx = 3c - 5bx$
11. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x} = 3$
12. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} + \dfrac{x}{c} = 3$
13. $\dfrac{ax - 1}{b} = \dfrac{1 - ax}{a}$
14. $\dfrac{a(a - x)}{b} + \dfrac{b(b - x)}{a} = 0$
15. $\dfrac{x - a}{b} - \dfrac{x - b}{a} = \dfrac{3(b - a)}{a}$
16. $\dfrac{m - x}{n} - \dfrac{n - x}{m} = 0$
17. $\dfrac{x^2 - a}{bx} - \dfrac{a - x}{b} = \dfrac{2x}{b} - \dfrac{a}{x}$
18. $\dfrac{ax - b}{c} + a = \dfrac{x + ac}{c}$
19. $\dfrac{x + a}{b} - \dfrac{x + b}{a} = \dfrac{2(a - b)}{ab}$
20. $\dfrac{a}{b}\left(1 - \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{b}{a}\left(1 - \dfrac{b}{x}\right) = 1$
21. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} = c$
22. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} + \dfrac{x}{c} = d$
23. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x} = d$
24. $\dfrac{a}{b - x} = \dfrac{b}{a - x}$
25. $\dfrac{x + 2}{x - 2} = \dfrac{m + n}{m - n}$
26. $\dfrac{m + n}{2 + x} = \dfrac{m - n}{2 - x}$

70. Resolução algébrica de um problema. A Álgebra nos permite resolver numerosos problemas com mais facilidade e rapidez que a Aritmética. E' necessário, porém, **saber pôr o problema em equação.** Esta é a fase mais difícil da resolução algébrica de um problema. A segunda fase, isto é, resolver a equação, é uma operação cuja dificuldade cresce com o grau da equação, com o número de incógnitas, etc.. (§74) Há uma terceira fase da qual trataremos oportunamente na quarta série ginasial.

Damos a seguir alguns problemas que deverão ser resolvidos em classe (quatro ou cinco ou mais por dia) para que os estudantes adquiram, pouco a pouco, a prática necessária para *pôr um problema em equação.* (*)

(*) A resolução dos problemas do primeiro grau está incluída no programa da quarta série ginasial. Entretanto, julgamos útil mostrar desde já aos nossos alunos como a Algebra facilita a resolução dos problemas.

Exercícios. Série XLII

Os estudantes resolverão os problemas que se seguem, *com uma incógnita.*

1. Qual o número cujo dôbro mais 5 é igual a 57?

Seja x êste número; de acôrdo com o enunciado do problema,

$$2x + 5 = 57 \;\therefore\; 2x = 57 - 5 \;\therefore\; 2x = 52 \;\therefore\; x = 26$$

2. Qual o número cuja metade mais a têrça parte é igual a 25?

Seja x êste número; de acôrdo com o enunciado do problema,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25 \;\therefore\; 3x + 2x = 150 \;\therefore\; 5x = 150 \;\therefore\; x = 30$$

3. Qual o número que, somado com o triplo de si mesmo, dá 52?

4. Somando 54 à minha idade, o resultado é o quádruplo da minha idade. Qual a minha idade?

5. Calcular dois números cuja soma é 105 e cujo quociente é 6.

Seja x o menor dos dois números pedidos; se o maior contém 6 vêzes o menor, deverá ser representado por $6x$. E sendo a soma dos dois números igual a 105, resulta que:

$$x + 6x = 105 \;\therefore\; 7x = 105 \;\therefore\; x = 15$$

O número menor é 15 e o maior é 6×15, isto é, 90.

6. Calcular dois números cuja soma é 276 e cujo quociente é 11.

7. Calcular dois números cuja diferença é 230 e cujo quociente é 11.

8. Calcular dois números cuja diferença é 216 e cujo quociente é 7.

9. A soma dos capitais de dois negociantes é 93 800 cruzeiros. Se o capital de um dêles é igual a 7 vêzes o do outro, qual o capital de cada um?

10. Multiplicando um certo número por 13, o produto é igual ao multiplicando aumentado de 1 020 unidades. Qual é êste número?

11. Um retângulo tem 138m de perímetro. Sendo o comprimento igual ao dôbro da largura, quanto mede cada uma destas dimensões?

Sendo x a largura, o comprimento será $2x$. Donde $2(x+2x)=138$.

12. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 2 024m, sendo a largura igual a um têrço do comprimento.

13. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 2 930m, sendo o comprimento igual ao quádruplo da largura.

14. Quais são as dimensões de um retângulo cujo perímetro mede 732m, sendo a largura igual a um quinto do comprimento?

15. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 316m, sendo a largura igual a três sétimos do comprimento.

Seja x o comprimento; a largura será $\frac{3x}{7}$. Donde, $2\left(x+\frac{3x}{7}\right) = 316$.

16. Calcular dois números consecutivos cuja soma é 75.

Dois números são consecutivos quando sua diferença é igual a 1; os números 15 e 16, 23 e 24, 36 e 37, são consecutivos. Seja x o menor dos números pedidos no problema; o outro será $x+1$. Donde $x+(x+1)=75$, etc..

17. Quais são os três números consecutivos cuja soma é 852?

18. Calcular quatro números consecutivos tendo por soma 774.

19. Calcular cinco números consecutivos tendo por soma 3 570.

20. Dois números consecutivos são tais que subtraindo 3 do primeiro e somando 5 ao segundo, a soma dos dois resultados é 37. Quais são os dois números?

Sejam x e $x+1$ os dois números pedidos; então $(x-3)+(x+1+5)=37$.

21. Calcular dois números pares consecutivos cuja soma é 106.

Sejam $2x$ e $2x+2$ os dois números pedidos, etc..

22. Calcular três números pares consecutivos tendo por soma 732.

23. Calcular três múltiplos consecutivos de 7, tendo por soma 189.

Sejam $7x$, $7x+7$ e $7x+14$ os três números pedidos, etc..

24. A diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é 43. Quais são os dois números?

Sejam x e $x+1$ os dois números; então $(x+1)^2-x^2=43$.

25. Um número é o quádruplo de outro. Se eu subtrair 99 do maior, e 36 do menor, os restos serão iguais. Quais são os dois números?

26. Pai e filho têm juntos 85 anos e a idade do pai é o quádruplo da do filho. Qual é a idade de cada um?

27. Um pai tem 48 anos e seu filho, 12. Há quantos anos a idade do pai era igual a 7 vêzes a do filho?

Há x anos; o pai tinha então $48-x$ e o filho, $12-x$. E a idade do pai era igual a 7 vêzes a do filho, isto é, $48-x=7(12-x)$, etc..

28. Um pai tem 24 anos e seu filho tem 2. Quantos anos deverão decorrer para que a idade do pai seja igual ao dôbro da do filho?

29. Dividir 90 em duas partes tais que 4 vêzes uma seja igual a 5 vêzes a outra.

Seja x a primeira; a segunda será $90-x$, etc..

30. Antônio tem o triplo da idade de Pedro; há 8 anos tinha o quádruplo. Qual é a idade de cada um?

31. Carlos tem 8 vêzes a idade de Darío; dentro de 4 anos a idade de Carlos será igual a 4 vêzes a idade de Darío. Qual é a idade de cada um?

32. Eu tenho 60 anos e meus três sobrinhos têm 48 anos. Quantos anos deverão decorrer para que a soma das idades de meus sobrinhos seja igual à minha?

33. A idade de um filho é a têrça parte da do pai; há 8 anos era a quinta. Qual é a idade de cada um?

34. Calcular dois números tendo por diferença 253 e por quociente 12.

35. Calcular dois números tendo por soma 252 e por quociente 17.

36. Dividir o número 126 em duas partes tais que uma seja o dôbro da outra.

37. Três irmãos ganharam 20 000 cruzeiros. O segundo recebeu a metade do que ganhou o primeiro, e o terceiro recebeu a quinta parte do que ganhou o segundo. Quanto ganhou cada um?

38. Dividir 900 cruzeiros por três pessoas, de modo que a segunda receba 50 cruzeiros mais do que a primeira, e a terceira tanto como as duas primeiras.

39. Dividir 190 cruzeiros entre quatro pessoas, de modo que a segunda receba 10 cruzeiros mais do que a primeira, a terceira 20 cruzeiros menos que a segunda, e a quarta tanto quanto a primeira e a terceira.

40. Gastei a metade do meu dinheiro, mais um quarto, mais um quinto e sobraram 12 cruzeiros. Quanto tinha?

71. **Forma normal da equação do primeiro grau com uma incógnita.** Esta equação, depois de completamente simplificada, se reduz sempre a dois têrmos; um têrmo que contém x (a incógnita), e outro que não o contém, isto é, *um têrmo independente da incógnita.*

Como os estudantes já o verificaram numerosas vêzes, resolvendo equações do primeiro grau com uma incógnita, a *penúltima equação a que chegam* é $7x=14$, $8x=20$, $3x=-15$, $2x=9$, etc.. **De um modo geral se diz em Álgebra que a forma normal das equações do primeiro grau com uma incógnita é**

$$ax = b$$

Nesta equação x é a incógnita; a e b são números quaisquer, são os coeficientes; b é o têrmo independente da incógnita.

De $ax=b$ deduzimos facilmente..... $x = \dfrac{b}{a}$

Esta é a fórmula resolutiva *da equação do primeiro grau com uma incógnita;* ela nos diz que:

Estando a equação do primeiro grau com uma incógnita, reduzida à forma normal, para obter o valor de x, *isto é, a raiz da equação, é bastante dividir o têrmo independente de* x, *pelo coeficiente de* x.

Por exemplo, sendo $5x=20$, segue-se que $x=20\div5 \therefore x=4$.

72. **Discussão da fórmula** $x=\dfrac{b}{a}$. Discutir uma fórmula é atribuir todos os valores possíveis às letras que nela entram e, em seguida, interpretar os resultados obtidos. Façamos, pois, todas as hipóteses possíveis a respeito dos valores que se podem atribuir às letras a e b.

Primeira hipótese: $a\neq0$ e $b\neq0$. Se os coeficientes a e b são diferentes de zero, isto é, se a e b são números quaisquer, inteiros ou fracionários, positivos ou negativos, a fórmula $x=\dfrac{b}{a}$

nos dá *um valor e sòmente um para* **x**. Com efeito, a divisão de b por a não admite dois quocientes diferentes. Êste é o caso mais comum na prática e podemos, portanto, concluir que :

A equação $\mathbf{ax=b}$, *sendo* **a** *e* **b** *números diferentes de zero, admite sempre uma raiz, e sòmente uma* Esta raiz pode ser um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo.

Segunda hipótese : $a \neq 0$ e $b=0$. Neste caso, a equação $ax=b$ admite uma raiz nula, porque o quociente de *zero* dividido por um número diferente de *zero*, é *zero*. Considerando as equações $5x=0$, $8x=0$, $10x=0$, etc., o único valor de x que satisfaz a estas equações é *zero*.

Terceira hipótese: $a=0$ e $b \neq 0$. Neste caso, a raiz da equação $ax = b$ toma a forma $x = \frac{b}{0}$ (com $b \neq 0$). Ora, a divisão de um número qualquer por *zero* não é possível ; portanto o símbolo $\frac{b}{0}$ não tem significado algum. Mas, se observarmos a equação $0 \times x = 5$, veremos de pronto que ela traduz um absurdo, porque não existe um número que, multiplicado por *zero*, dê um produto igual a 5 ; o produto é sempre nulo. O símbolo $\frac{b}{0}$ é, geralmente, o símbolo de impossibilidade.

Portanto, quando a raiz de uma equação se apresenta sob a forma $\frac{m}{0}$, sendo $m \neq 0$, não é possível resolver esta equação.

Entretanto, êste símbolo $\frac{m}{0}$ tem, em Matemática, uma interpretação muito interessante.

Consideremos as frações

$$\frac{5}{1},\ \frac{5}{0{,}1},\ \frac{5}{0{,}01},\ \frac{5}{0{,}001},\ \frac{5}{0{,}000\,1},\ \frac{5}{0{,}000\,01},\ \ldots\ldots \qquad (A)$$

cujos denominadores vão diminuindo sucessivamente.

As frações do grupo (A) podem ser substituídas pelos seus valores calculados, isto é :

$$5,\quad 50,\quad 500,\quad 5\,000,\quad 50\,000,\quad 500\,000, \ldots\ldots \qquad (B)$$

Portanto, se o numerador de uma fração permanece constante, as sucessões (A) e (B) nos mostram que, *à medida que o denominador de uma fração diminue*, o valor desta mesma fração aumenta. Donde resulta que, quando o denominador se torna muito pequeno, aproximando-se de *zero*, o valor da fração torna-se maior do que qualquer número dado, por muito grande que seja êste número dado. Êste valor limite, que não é possível exprimir numèricamente, é chamado *valor infinito* ou simplesmente *infinito*, e é representado simbòlicamente por um oito deitado (∞).

E' preciso observar que :

O denominador da fração diminue continuamente, **tendendo para zero, mas sem atingir o valor zero**, *e a fração tende para o limite* **infinito**, *sem nunca atingí-lo, mas se aproximando dêle cada vez mais.*

Em linguagem matemática, diremos :

O limite da fração $\frac{m}{x}$ (com m constante e x variável) *quando* **x** *tende para* **zero**, *é o infinito.*

Recorrendo aos símbolos algébricos, traduziremos êsse fato pela seguinte notação :

$$\lim.\left(\frac{m}{x}\right)_{x \rightarrow 0} = \infty$$

Ou, abreviadamente : $\frac{m}{0} = \infty$.

Portanto, o infinito pode ser representado, indiferentemente, pela expressão $\frac{m}{0}$ com ($m \neq 0$) ou pelo símbolo ∞.

Quarta hipótese : $a=0$ e $b=0$. Neste caso, teremos $x=\frac{b}{a}$ ∴ $x=\frac{0}{0}$. Êste resultado significa que a equação tem uma infinidade de raízes, e é chamado o *símbolo da indeterminação*. Com efeito, a equação toma a forma $0x = 0$, e é, evidentemente uma identidade, pois *qualquer número finito multiplicado por zero é igual a zero.* Em resumo :

Reduzida a equação do primeiro grau com uma incógnita, à forma normal $ax=b$,

I. Sendo $a\neq 0$ e $b\neq 0$, a equação tem uma única raiz; é uma *equação determinada*.

II. Sendo $a\neq 0$ e $b=0$, a raiz da equação é *zero*; sendo *zero* um número como outro qualquer, ainda neste caso a equação tem uma única raiz, e é, portanto, uma *equação determinada*.

III. Sendo $a=0$ e $b\neq 0$, a equação não tem raízes; é uma *equação impossível ou absurda*.

IV. Sendo $a=0$ e $b=0$, a equação transforma-se em uma identidade; é uma *equação indeterminada*.

Observação. Sendo $\frac{m}{n}=m\times\frac{1}{n}$, e supondo $m=0$ e $n=0$, resulta $\frac{0}{0}=0\times\infty\ \therefore\ 0\times\infty=n$ (número qualquer). Portanto, o produto $0\times\infty$ é também um símbolo de indeterminação.

73. Indeterminações aparentes. Consideremos uma fração algébrica *racional* em x, isto é, cujos têrmos, numerador e denominador, são expressões racionais e inteiras em x. Seja

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6} \qquad (A)$$

esta fração. Calculando o seu valor numérico, para $x=3$, teremos sucessivamente:

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}=\frac{3^2-7\times 3+12}{3^2-5\times 3+6}=\frac{9-21+12}{9-15+6}=\frac{0}{0}$$

E concluímos que, para $x=3$, o valor numérico da fração (A) é $\frac{0}{0}$, é indeterminado, é um número qualquer: 5, 8, 12, etc.. Entretanto, esta conclusão é arriscada; pode ser falsa.

Com efeito, se os dois têrmos da fração (A) se anulam, para $x=3$, conclue-se, de pronto, que ambos são divisíveis exatamente por $x-3$. (§48)

Neste caso, dividindo ambos os têrmos da fração (A) por $x-3$ ou fatorando-os (§52, 5.º caso) teremos sucessivamente:

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-4}{x-2} \qquad (B)$$

E, nesta última fração, fazendo $x=3$, veremos que o *verdadeiro valor* da fração (A) é -1.

Era o fator $x-3$, comum aos dois têrmos da fração (A) e nulo para $x=3$ que fazia com que esta fração se apresentasse indeterminada. Esta indeterminação era *falsa, aparente*; suprimindo-se o fator $x-3$, a indeterminação desapareceu.

II. Consideremos a fração racional $\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-7x+6}$ .... e procuremos o seu valor numérico, fazendo $x=1$. Acharemos $\frac{0}{0}$. Esta indeterminação será real ou aparente? Não nos é possível, por enquanto, fatorar os têrmos da fração dada. Entretanto, se ambos se anulam para $x=1$, concluímos, (§48) que êles são divisíveis (exatamente) por $x-1$, e que a indeterminação é talvez aparente, e produzida pelo fator $x-1$.

Imediatamente dividimos ambos os têrmos da fração por $x-1$, e teremos...... $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

Procurando o valor numérico desta fração, para $x=1$, resulta:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\frac{1-3+2}{1+1-6}=\frac{0}{-4}=0$$

Portanto, para $x=1$, $\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-7x+6}=0$

Se uma fração algébrica, cujos têrmos são polinômios inteiros e racionais em x, *toma a forma* $\frac{0}{0}$ *para* x = a, *o teorema de d'Alembert nos previne de pronto de que ambos os têrmos desta fração são divisíveis exatamente por* x − a; *então dividimos os têrmos da fração por* x − a, *e procuramos o valor numérico da fração resultante, para* x = a; *e assim por diante.*

III. Vimos no parágrafo anterior que a expressão $0\times\infty$ é também um símbolo de indeterminação.

Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$(a^2+2a-15)\times\frac{4}{a^2+a-12} \qquad (A)$$

Calculando seu valor numérico, para $a=3$, teremos:

$$(9+6-15)\times\frac{4}{9+3-12}=0\times\frac{4}{0}=0\times\infty$$

E diremos que, para $a=3$, a expressão A é indeterminada. Mas esta indeterminação será real ou aparente? Escrevendo a expressão A sob a forma

$$\frac{4(a^2+2a-15)}{a^2+a-12}$$

e procedendo como nos casos anteriores (I e II), teremos:

$$\frac{4(a^2+2a-15)}{a^2+a-12}=\frac{4\,(a+5)(a-3)}{(a+4)(a-3)}=\frac{4(a+5)}{a+4}$$

E nesta última fração, fazendo $a=3$, acharemos $\frac{32}{7}$, que é o verdadeiro valor da expressão A, para $a=3$.

Portanto, a indeterminação da expressão A era aparente; era produzida pelo fator $a-3$ que se anula para $a=3$.

IV. Sendo $\frac{m}{n}=\frac{1}{n}\div\frac{1}{m}$, e supondo $m=0$ e $n=0$,

resulta:

$$\frac{0}{0}=\frac{1}{0}\div\frac{1}{0}\;\therefore\;\frac{0}{0}=\frac{\infty}{\infty}$$

Portanto, a expressão $\frac{\infty}{\infty}$ é também um símbolo de indeterminação. Entretanto, a indeterminação indicada pelo símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ pode ser, às vêzes, aparente.

O símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ aparece quando se quer determinar o valor numérico, para $x=\infty$, de uma fração algébrica cujos têrmos são polinômios inteiros em x. Dêste caso trataremos oportunamente.

V. Sendo $\frac{m-n}{mn}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$, e supondo $m=0$ e $n=0$,

resulta:

$$\frac{0}{0}=\infty-\infty$$

Portanto, as expressões $\frac{0}{0}$ e $\infty-\infty$ são eqüivalentes, isto é:

$$\infty-\infty=n\ \textit{(número qualquer)}$$

E a expressão $\infty-\infty$ é também um símbolo de indeterminação. Êste símbolo aparece quando se quer calcular o valor numérico de uma diferença entre duas frações algébricas. Neste caso, convém calcular em primeiro lugar, a diferença entre as duas frações, suprimir os fatores comuns a ambos os têrmos da fração resultante e, depois, calcular-lhe o valor numérico.

Exercícios. Série XLIII

Calcular o verdadeiro valor das expressões algébricas seguintes, de acôrdo com os valores de x indicados para cada uma delas.

1. $\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$ para $x=3$
2. $\frac{x^2-11x+24}{x^2-10x+16}$ para $x=8$
3. $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$ para $x=2$
4. $\frac{x^2+x-20}{x^2-3x-4}$ para $x=4$
5. $\frac{x^2-3x-28}{x^2-10x+21}$ para $x=7$
6. $\frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+12}$ para $x=6$
7. $\frac{x^2+13x+30}{x^2+8x+15}$ para $x=-3$
8. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ para $x=-1$
9. $\frac{x^2+7x+12}{x^2+8x+15}$ para $x=-3$
10. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}$ para $x=-2$
11. $\frac{a^2+ab-6b^2}{a^2+2ab-8b^2}$ para $a=2b$
12. $\frac{c^2-cd-12d^2}{c^2+cd-20d^2}$ para $c=4d$
13. $\frac{m^2+am-2a^2}{m^2-2am+a^2}$ para $m=a$
14. $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+4xy+3y^2}$ para $x=-y$

74. **Classificação das equações.** (*) Para classificar uma equação é necessário, preliminarmente, passar todos os seus têrmos para um dos membros da mesma equação, (em geral, para o 1.º membro) de modo que o outro membro fique reduzido a zero; em seguida, reduzem-se os têrmos semelhantes. A equação toma assim a forma geral A = O, na qual A, o primeiro membro da equação, contém a incógnita (ou as incógnitas).

E' sob a forma geral A = O, que se classifica uma equação.

A classificação de uma equação obedece a vários critérios.

(*) Êste parágrafo pode ser omitido em um primeiro estudo, ou desenvolvido gradualmente, de acôrdo com as necessidades do curso.

Uma equação pode ser classificada **pelo número de suas incógnitas.** Consideremos as equações seguintes :

$5x-4=3x+4 \therefore 2x-8=0$ | $3x-y=7+2x \therefore x-y-7=0$ | $x+y-5=2z+3 \therefore x+y-2z-8=0$

A primeira é chamada *equação com uma incógnita* ; a segunda, *equação com duas incógnitas* ; a terceira, *equação com três incógnitas.*

Consideremos a equação.

$$3x-2y+8 = 3x-5z-2y+11 \qquad (1)$$

Reduzindo esta equação à forma A = O, teremos sucessivamente :

$$3x-2y+8-3x+5z+2y-11 = 0 \therefore$$
$$5z-3 = 0$$

E assim verificamos que a equação (1) sendo, aparentemente, uma equação com três incógnitas, é, na realidade, uma equação com uma incógnita.

Eis por que, para classificar uma equação, é conveniente dar-lhe a forma geral A = O, com a redução dos têrmos semelhantes, no 1.º membro.

Observação. Habitualmente representam-se as incógnitas de uma equação pelas últimas letras do alfabeto, x, y, z, t, ... ; ou por estas letras acentuadas, x, x', x'', y, y', y'',... ou afetadas de índices, x_1, x_2, x_3, ..., etc.. Mas, as exceções são numerosas ; em certos casos, as incógnitas podem ser representadas pelas letras a, b, c, ... m, n, etc..

Uma equação pode ser classificada **pela natureza das operações a que estão submetidas as incógnitas.** Esta é a classificação mais importante.

Voltemos à equação A=O e suponhamos, para maior simplicidade, que esta equação contém sòmente uma incógnita, x.

Se, na equação A = O, a incógnita x estiver submetida ùnicamente às operações elementares, *adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação* (com expoente inteiro ou fracionário) e *radiciação* (com índice inteiro ou fracionário) diremos que a equação A=O é uma *equação algébrica pròpriamente dita* ou, abreviadamente, **equação algébrica.**

Por exemplo, as equações

$$x^3+2x-2 = 0$$
$$\sqrt{x}-x+1 = 0$$
$$x^{\frac{3}{2}}+x-1 = 0 \therefore \sqrt{x^3}+x-1 = 0 \qquad (\S 40)$$
$$x^{-2}+2x-4 = 0 \therefore \frac{1}{x^2}+2x-4 = 0 \qquad (\S 39)$$
$$2+\frac{1}{x-1}-3x = 0$$

são equações algébricas.

Se, na equação A = O, a incógnita x estiver submetida a operações transcendentes (*) diremos que a equação A = O é uma **equação transcendente.**

As equações algébricas podem ser **racionais** *ou* **irracionais.**

São *racionais*, quando a incógnita x está submetida sòmente a *operações racionais*, isto é, *adição, subtração, multiplicação, divisão* e *potenciação* (com expoente *inteiro*).

São *irracionais*, quando a incógnita x está submetida a uma *radiciação* ou, o que é a mesma coisa, a uma potenciação com expoente *fracionário.*

As equações

$$x^2+3x-1 = 0$$
$$x^3-\frac{1}{1-x}+2 = 0$$
$$x^2\sqrt{2}+x-1 = 0$$
$$x^{-2}+x-1 = 0$$

são racionais.

No 3.º exemplo, $\sqrt{2}$ é um valor numérico que não influe na classificação da equação ; *não é a incógnita* que está sujeita à extração da raiz quadrada. Observemos também, em relação ao 4.º exemplo, que $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$. (§ 39)

(*) Não é possível exemplificar, neste parágrafo, as equações transcendentes. Os primeiros exemplos destas equações, isto é, *equações trigonométricas* e *equações exponenciais* serão apresentados depois da 4.ª série ginasial.

Consideremos a equação $\sqrt[3]{x^6} + 3x - 1 = 0$

Parece ser irracional, mas não é, porque $\sqrt[3]{x^6} = x^2$. (§34) Verificamos assim, mais uma vez que, para bem classificar uma equação, é indispensável efetuar todas as simplificações possíveis.

As equações $\sqrt{1-x} + x - 1 = 0$

$$x^{\frac{1}{3}} + 2x - 3 = 0 \therefore \sqrt[3]{x} + 2x - 3 = 0$$

são irracionais.

Por sua vez, as equações *racionais* se dividem em duas categorias: **equações inteiras** e **equações fracionárias.**

Uma equação racional é inteira, quando a incógnita não figura como denominador. E' fracionária, quando figura como denominador.

As equações $x^2 + x + 1 = 0$

$$x^2 - \frac{2}{(1-x)^{-2}} + 1 = 0 \therefore x^2 - 2(1-x)^2 + 1 = 0$$

são inteiras.

As equações $x + \dfrac{1}{x-1} - 3 = 0$

$$(x-1)^{-2} + 3 = 0 \therefore \frac{1}{(x-1)^2} + 3 = 0$$

são fracionárias.

Finalmente, *as equações inteiras* (e, portanto, *racionais*) podem ser de *graus diferentes.* O grau de uma equação inteira é determinado pelo expoente mais alto da incógnita (ou das incógnitas). Assim, as equações

$$2x - 3 = 0 \qquad x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0 \qquad x^5 - 1 = 0$$

são, respectivamente, do 1.°, do 2.°, do 4.° e do 5.° grau em x.

Consideremos a equação

$$x^2 = x(x-1) + 3 \qquad (1)$$

Reduzindo-a à forma A = O, acharemos

$$x - 3 = 0$$

Portanto, a equação (1) que *parece* ser do 2.° grau é, na realidade, do 1.° grau.

Em resumo, as equações algébricas se classificam de acôrdo com o quadro seguinte:

$$\text{equações algébricas} \begin{cases} \text{racionais} \begin{cases} \text{inteiras} \begin{cases} \text{do 1.° grau} \\ \text{do 2.° grau} \\ \text{do 3.° grau} \\ \text{do 4.° grau, etc..} \end{cases} \\ \text{fracionárias} \end{cases} \\ \text{irracionais} \end{cases}$$

Neste capítulo estudámos sòmente a resolução das equações algébricas, racionais e inteiras do 1.° grau, com uma incógnita.

75. **Equações de grau superior ao primeiro.** A dificuldade da resolução de uma equação aumenta com o grau da mesma equação. Mais tarde estudaremos na quarta série ginasial, o método geral para resolver as equações do 2.° grau. Entretanto, a fatoração algébrica (§53) nos permite resolver com facilidade algumas equações de grau superior ao primeiro.

I. Resolver a equação $x^2 - 11x + 24 = 0$.

Fatorando o primeiro membro desta equação, teremos:

$$(x-3)(x-8) = 0 \qquad \text{(A)}$$

O segundo membro da equação A é *zero;* o valor ou os valores de x devem ser tais que, substituídos no primeiro membro, *o anulem, o reduzam a zero.* Mas o primeiro membro, $(x-3)(x-8)$, é um produto. E, para que um produto seja nulo, é bastante que um dos fatores seja nulo.

Portanto, o primeiro membro da equação ficará reduzido a zero se tivermos:

$$x - 3 = 0 \therefore x = 3$$
$$x - 8 = 0 \therefore x = 8$$

E assim verificamos que a equação A tem duas raízes, 3 e 8, e que distinguiremos uma da outra dizendo $x' = 8$ e $x'' = 3$.

II. Resolver a equação $x^2 + 5x - 14 = 0$.

Fatorando o primeiro membro..... $(x+7)(x-2) = 0$

Igualando a zero cada um dos fatores,

$$x + 7 = 0 \therefore x = -7 \qquad\qquad \text{R.} \begin{cases} x' = +2 \\ x'' = -7 \end{cases}$$
$$x - 2 = 0 \therefore x = +2$$

III. Resolver a equação $x^2=9$. Passando 9 para o primeiro membro e fatorando, teremos :

$$x^2-9=0 \quad \therefore \quad (x+3)(x-3)=0 \quad \therefore$$

$$x+3=0 \quad \therefore \quad x=-3 \qquad x-3=0 \quad \therefore \quad x=+3 \qquad \text{R.} \begin{cases} x'=+3 \\ x''=-3 \end{cases}$$

Observação. E' fácil compreender que, sendo $x^2=9$, a raiz desta equação pode ser $+3$ ou -3.

IV. Resolver a equação $x^2-10x+25=0$.
Fatorando o primeiro membro,...... $(x-5)(x-5)=0 \quad \therefore$

$$x-5=0 \quad \therefore \quad x=5 \qquad x-5=0 \quad \therefore \quad x=5 \qquad \text{R.} \begin{cases} x'=+5 \\ x''=+5. \end{cases}$$

Observação. Na verdade a equação $x^2-10x+25=0$ tem apenas uma raiz que é 5. Mas a equação do segundo grau com uma incógnita tem em geral duas raízes; eis por que, quando acontece que as duas são iguais, nós escrevemos, como no caso presente, $x'=5$ e $x''=5$. E dizemos, em Matemática, que a equação dada tem *uma raiz dupla.*

V. Resolver a equação $x^2-5x=0$.
Fatorando o primeiro membro,...... $x(x-5)=0 \quad \therefore$

$$x=0 \quad \therefore \quad x=0 \qquad x-5=0 \quad \therefore \quad x=5 \qquad \text{R.} \begin{cases} x'=5 \\ x''=0 \end{cases}$$

VI. Resolver a equação $x^3+x^2-4x-4=0$.
Fatorando o primeiro membro (por agrupamento),

$$(x^2-4)(x+1)=0 \quad \therefore$$

$$(x+2)(x-2)(x+1)=0 \quad \therefore$$

$$x+2=0 \quad \therefore \quad x=-2 \qquad x-2=0 \quad \therefore \quad x=+2 \qquad x+1=0 \quad \therefore \quad x=-1 \qquad \text{R.} \begin{cases} x'=+2 \\ x''=-1 \\ x'''=-2 \end{cases}$$

Exercícios. Série XLIV

Resolver pela fatoração as equações seguintes :

1. $x^2+11x+24=0$	6. $x^2+5x+6=0$	11. $x^2-8x-20=0$
2. $x^2-7x+10=0$	7. $x^2-8x+12=0$	12. $x^2+3x+2=0$
3. $x^2+6x-7=0$	8. $x^2-7x+6=0$	13. $x^2-17x+30=0$
4. $x^2-3x-28=0$	9. $x^2+11x-12=0$	14. $x^2-13x+30=0$
5. $x^2+13x+12=0$	10. $x^2-9x-36=0$	15. $x^2-16x+15=0$

16. $x^3-8x^2+12x=0$	19. $x^3-7x^2+12x=0$
17. $x^3-13x^2+12x=0$	20. $3x^2-24x+36=0$
18. $x^3+5x^2-84x=0$	21. $4x^2+12x+8=0$

CAPÍTULO VI

Geometria Dedutiva

76. Proposições geométricas. *Proposição é a expressão de um juízo por meio de palavras.* (*Lógica*, de J. Balmes). Por exemplo:

I. *O homem é um ser mortal.*

II. *Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.*

III. *Se quatro números formam uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.* (E.M.S.V. §61)

IV. *Se* $x = y$ *e* $x' = y'$ *resulta que* $x + x' = y + y'$, $x - x' = y - y'$, $x \times x' = y \times y'$, $x : x' = y : y'$.

V. *Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9.*

Entre as proposições estudadas em Matemática devemos lembrar os *axiomas* e os *teoremas*.

Axioma ou postulado é a proposição aceita sem demonstração.

A palavra *postulado* é derivada do verbo latino *postulare*, que significa *pedir*. O postulado é uma proposição, cuja aceitação *se pede* e não se prova.

Teorema é a proposição que se demonstra. Nós não aceitamos as proposições III e V, sem a necessária prova.

No enunciado de um teorema há a considerar duas partes: *hipótese* e *tese*. A hipótese é a suposição, é o ponto de partida; a tese é a conclusão a que se quer chegar, é aquilo que se pretende provar. Consideremos a proposição III; é um teorema porque exige prova; nós não aceitamos esta verdade matemática sem uma prova. Neste teorema a hipótese é que nós temos quatro números formando proporção, isto é, $a : b :: c : d$. A tese, isto é, aquilo que exigimos que nos provem, é que o produto ad é igual ao produto bc.

Teorema recíproco de um teorema dado ou, simplesmente recíproca de um teorema dado, é o teorema que se obtém tomando a tese do teorema dado como hipótese e a hipótese como tese. Assim, em relação à proposição III, a recíproca é a seguinte:

VI. *Se o produto de dois números é igual ao produto de outros dois, êstes quatro números formam uma proporção, colocando os fatores do primeiro produto nos extremos (ou nos meios) e os fatores do segundo produto nos meios (ou nos extremos).*

Nesta proposição, a hipótese é que nós temos dois produtos iguais ad e bc. A tese é que êstes quatro fatores formam a proporção $a : b :: c : d$.

Para distinguí-lo da sua recíproca, o teorema primitivo, isto é, a proporsição III no caso presente, será chamado *teorema direto*.

Teorema contrário de um teorema dado é o teorema que se obtém, negando a hipótese e, lògicamente, a tese do teorema dado. Assim, em relação à proposição III, o teorema contrário é o seguinte:

VII. *Se quatro números não formam uma proporção, o produto dos extremos não é igual ao produto dos meios.*

Nesta proposição, a hipótese é que a razão $a : b$ não é igual à razão $c : d$. A tese é que o produto ad não é igual ao produto bc.

Teorema contrário de um teorema recíproco é o teorema que se obtém negando a hipótese e, lògicamente, a tese do teorema recíproco. Assim, em relação à recíproca da proposição III, isto é, em relação à proposição VI, o teorema contrário é o seguinte:

VIII. *Se o produto de dois números não é igual ao produto de outros dois, êstes quatro números não formam uma proporção, colocando os fatores do primeiro produto nos extremos (ou nos meios) e os fatores do segundo produto nos meios (ou nos extremos).*

Nesta proposição, a hipótese é que o produto ad não é igual ao produto bc. A tese é que a razão $a : b$ não é igual à razão $c : d$.

A proposição III, sua recíproca VI, e os dois teoremas contrários VII e VIII, podem ser resumidos no quadro seguinte:

teorema direto	III	H. $\{ a : b :: c : d$ T. $\{ ad = bc$
teorema recíproco	VI	H. $\{ ad = bc$ T. $\{ a : b :: c : d$
teorema contrário do direto	VII	H. $\left\{ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \right.$ T. $\{ ad \neq bc$
teorema contrário do recíproco	VIII	H. $\{ ad \neq bc$ T. $\left\{ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \right.$

Do exame dêste quadro resulta que o teorema contrário do recíproco é o recíproco do teorema contrário do direto.

Parece à primeira vista que, se uma proposição é verdadeira, sua recíproca também o é. Nem sempre. Assim, considerando a proposição I, a recíproca seria: *Todos os seres mortais são homens*, o que não é verdade. Aprendemos em Aritmética que, *quando um número divide as parcelas, também divide a soma.* Entretanto, a recíproca nem sempre é verdadeira. Por exemplo, o número 3 divide a soma 12, mas não divide as parcelas 5 e 7 desta mesma soma.

No decorrer destas lições encontraremos muitas recíprocas que não são verdadeiras.

77. O método dedutivo. O método dedutivo é o empregado na Matemática, e, particularmente, na Geometria. O professor de Geometria nos diz: *A soma dos ângulos (internos) de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos.* (§ 111). Ora, esta verdade não é bastante afirmá-la; é preciso também prová-la. Mas, para provar esta verdade, é indispensável que o professor tenha provado aos seus alunos esta outra verdade: *A soma dos três ângulos (internos) de um triângulo é igual a dois ângulos retos.* (§ 109). Mas, esta segunda verdade depende, por sua vez, de outras verdades que deverão ter sido provadas anteriormente. (§ 103). E assim sucessivamente.

Vemos pois que as verdades da Geometria formam uma cadeia cujos elos são aprendidos cada um por sua vez; *estas verdades se*

deduzem *umas das outras pelo raciocínio;* estabelecido que o teorema A é verdadeiro, prova-se o teorema B; sendo A e B verdadeiros, prova-se o teorema C; e assim por diante.

Mas, como começar? Qual será o ponto de partida para provar, para demonstrar todos os teoremas da Geometria? E' muito simples; é necessário estabelecer um conjunto de axiomas ou postulados para dêles deduzir lògicamente todos os teoremas da Geometria; êstes axiomas, convenientemente escolhidos, nos auxiliarão a construir o edifício lógico que é a **Geometria Dedutiva.**

Assim, o método dedutivo consiste em encadear, pelo raciocínio, tôdas as verdades de modo que qualquer delas decorra das precedentes e ùnicamente destas.

O método dedutivo foi empregado nas ciências matemáticas desde a mais remota antiguidade; estas ciências podem ser consideradas como as ciências dedutivas por excelência e particularmente a Geometria, cuja elaboração como sistema dedutivo é devida aos gregos (do V ao III século A.C.). A Geometria racional que aprendemos hoje no curso secundário é, com ligeiras modificações e acréscimos, a Geometria que Euclides, famoso matemático grego, escreveu em Alexandria, provavelmente no período 306-283 A. C., durante o reinado de Ptolomeu I.

Do livro de Euclides, que se chamava *Elementos,* foram tiradas umas 1 500 edições, sendo a obra mais difundida depois da Bíblia. (H. Wieleitner). Os espanhóis, porém, opinam que o segundo lugar, relativamente ao número de edições, cabe ao famoso *D. Quichote,* a obra imortal de Cervantes.

78. Métodos de demonstração. *A demonstração de um teorema é o trabalho intelectual necessário para provar êste mesmo teorema.* Existem, em Matemática, milhares e milhares de teoremas; entretanto, poucos são os métodos necessários para demonstrá-los. Entre os mais empregados citaremos, por enquanto, os seguintes:

a) Demonstração direta.

b) Demonstração por absurdo.

O primeiro método consiste em tomar a hipótese e, com o auxílio de definições, axiomas e teoremas já demonstrados, dela deduzir a tese ou conclusão a que se quer chegar.

O segundo método consiste em negar a tese de todos os modos possíveis e verificar que, a cada negação da tese corresponde um absurdo, isto é, uma negação da hipótese. Ora, se cada negação da tese nos conduz a um absurdo, forçoso é aceitá-la.

Para exemplificar o primeiro processo vamos tomar a proposição III. (§ 76) (*)

$$\text{H.} \left\{ a : b :: c : d \right. \qquad \text{T.} \left\{ ad = bc \right.$$

Por hip. os números a, b, c, d formam uma proporção. Ora, *lembrando a definição de uma proporção,* podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

Multiplicando-se ambos os membros desta igualdade pelo mesmo número bd, os dois produtos constituem ainda uma igualdade, *em virtude do princípio da multiplicação.* (§ 66) Então, da igualdade (1) resulta:

$$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d} \qquad (2)$$

Dividindo-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, o valor da fração não se altera, *em virtude de um conhecido teorema de Aritmética.*

Aplicando-se êste teorema à igualdade (2) resulta:

$$ad = bc \qquad (3)$$

Ora, a igualdade (3) é justamente a nossa tese. E esta demonstração nós a fizemos, tomando a hip. e aplicando-lhe sucessivamente uma definição, um axioma e um teorema.

Para exemplificar o segundo processo, voltemos à mesma proposição.

$$\text{H.} \left\{ a : b :: c : d \right. \qquad \text{T.} \left\{ ad = bc \right.$$

De acôrdo com a tese, o produto ad é igual ao produto bc. Ora, só há um modo de negar a tese: é afirmar que êstes dois produtos são diferentes. Suponhamos que

$$ad > bc \qquad (1)$$

(*) Evidentemente, não podemos, por ora, exemplificar com um teorema de Geometria.

Dividindo-se ambos os membros desta desigualdade por um mesmo *número positivo bd*, os dois quocientes formarão ainda uma desigualdade do mesmo sentido que a desigualdade (1) *em virtude de um teorema de Álgebra que aprenderemos oportunamente.* Aplicando-se êste teorema à desigualdade (1) resulta :

$$\frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \qquad (2)$$

De (2) *aplicando-se um conhecido teorema de Aritmética*, resulta:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \qquad (3)$$

Portanto, a razão $\frac{a}{b}$ é maior que a razão $\frac{c}{d}$. Mas isto é um absurdo porque, por hip. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ora, se a negação da tese nos conduziu a um absurdo, e não havendo outro meio de negá-la, é forçoso aceitá-la.

Observação Partindo da desigualdade $ad < bc$, facilmente se provará que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Em Geometria, o método mais empregado para demonstrar teoremas é o método direto. E, para que o estudante consiga bons resultados com a adoção dêsse método, deve obedecer aos preceitos seguintes:

a) *Entender claramente aquilo que pretende demonstrar.*

b) *Separar nitidamente a hipótese da tese.*

c) *Examinar minuciosamente a hipótese, refletir bastante sôbre o seu conteúdo e sôbre os fatos anteriores que ela pode evocar em seu espírito, para dela tirar o maior partido possível.*

d) *Partindo da hipótese, caminhar cautelosamente para alcançar a tese, com o auxílio de definições, axiomas e teoremas anteriormente demonstrados.*

Êste último preceito é o mais difícil na aplicação ; consegue-se com numerosos exercícios, e com o auxílio de algumas regras que serão conhecidas oportunamente.

Exercícios em classe. Demonstrar diretamente e por absurdo, as proposições III, VI, VII e VIII do §80.

79. O ponto, a reta e o plano. *São os* **conceitos fundamentais** *da Geometria, também chamados* **conceitos primitivos** *ou* **noções primitivas.** Dêles já nos ocupámos desenvolvidamente em nosso E.M.P.V. §§ 1 a 18, e que os estudantes devem reler cuidadosamente.

As noções de ponto, reta e plano são *intuitivas*, isto é, delas temos um conhecimento direto e imediato, sem que seja preciso defini-las.

A êstes três conceitos fundamentais da Geometria, devemos juntar também o *sólido geométrico*, que não é um *conceito primitivo*, visto que é necessário defini-lo. (E.M.P.V. §4)

Dois pontos se distinguem um do outro pela sua posição, e nada mais.

Já vimos também que as principais propriedades da reta são :

a) *Por dois pontos dados,* A *e* B, *podemos traçar sempre uma reta, e sòmente uma.* O que eqüivale a dizer que : *Dois pontos determinam uma reta, e sòmente uma.* Desta propriedade resulta :

Duas retas AB *e* A'B', *tendo dois pontos comuns, coincidem em toda a sua extensão.*

b) *Por um ponto dado podemos traçar uma infinidade de retas.* Uma infinidade de retas significa *tantas retas quantas quisermos.* Portanto, *um ponto de uma reta não é bastante para determinar esta mesma reta.*

Axioma. *Em uma reta existem uma infinidade de pontos.*

Duas retas se distinguem uma da outra pela sua posição, e nada mais.

A propriedade característica do plano, e que se aceita como um axioma (ou postulado) é a seguinte :

Se um plano contém dois pontos de uma reta, contém a reta toda.

Dois planos se distinguem um do outro pela sua posição, e nada mais.

Axiomas relativos ao plano. Os principais são os seguintes:

I. *Em um plano podemos traçar uma infinidade de retas.*

II. *Existem tantos planos quantos quisermos.*

III. *Três pontos dados e não situados em linha reta determinam um plano, e sòmente um.*

Do axioma III resultam os seguintes corolários:

I. Uma reta AB, *e um ponto* M *situado fora da reta, determinam um plano, e sòmente um.*

Com efeito, tomemos dois pontos C e D na reta AB; os pontos C, D e M, não situados em linha reta, determinam um plano, e sòmente um. (axioma III)

II. Duas retas que se cortam determinam um plano, e sòmente um.

Observação. As noções de semirreta e segmento também já são conhecidas. (E.M.P.V. § 14)

80. Figuras geométricas. *A figura geométrica é um conjunto de elementos geométricos, isto é, pontos, linhas, superfícies e sólidos.*

A figura geométrica mais simples é o ponto.

Duas figuras geométricas podem ser *semelhantes, eqüivalentes* ou *iguais.*

São **semelhantes** *quando têm a mesma forma.* Por exemplo, dois quadrados cujos lados medem respectivamente 4m e 7m, duas circunferências cujos raios medem respectivamente 5m e 8m, são figuras semelhantes.

São **eqüivalentes** *quando têm a mesma extensão.* Por exemplo, um quadrado cujo lado mede 6m e um retângulo cujas dimensões respectivas são 9m e 4m, são figuras eqüivalentes; um cubo cuja aresta mede 8m e um bloco retangular cujas dimensões são 4m, 8m e 16m, são também figuras eqüivalentes.

São **iguais** *quando têm a mesma forma e a mesma extensão.*

Figura geométrica plana *ou, simplesmente,* **figura plana** *é a figura cujos pontos estão todos situados em um mesmo plano.*

O triângulo é uma figura plana. (§ 79)

Postulado da superposição. *Uma figura geométrica pode deslocar-se no plano ou no espaço, e de um modo qualquer, sem que a sua forma e a sua extensão se alterem.*

Para provar a igualdade de duas figuras geométricas, coloca-se uma sôbre a outra. Se elas coincidirem em toda a sua extensão, diremos que são iguais.

Observação. A coincidência de duas figuras geométricas pode ser feita experimentalmente ou pelo raciocínio.

Todos os pontos são iguais; tôdas as retas são iguais; todos os planos são iguais.

81. Divisão da Geometria. A Geometria divide-se em duas partes:

a) **Geometria Plana**

b) **Geometria Sólida** *ou* **Geometria no Espaço**

A primeira estuda as figuras planas; a segunda estuda as figuras não planas.

Observação. Certas figuras e, particularmente, certas linhas como a mediatriz de um segmento retilíneo, a bissetriz de um ângulo, a circunferência, etc., gozam de determinadas propriedades, pelo que se denominam **lugares geométricos.** Destas figuras trataremos oportunamente, isto é, quando for possível exemplificar.

Capítulo VII

A Reta

82. Ângulos. *Ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas distintas que têm a mesma origem.* A figura AOB (fig.1) é um ∠(*). As semirretas OA e OB são os *lados* do ângulo, e o ponto O, origem comum das semirretas, é o vértice do ângulo. Para ler um ∠ enunciam-se as três letras da figura, tendo, porém, o cuidado de enunciar em segundo lugar a letra do vértice. Portanto, é êrro dizer ∠ ABO ou ∠ BAO (fig. 1); é necessário dizer ∠ AOB ou ∠ BOA. Poderíamos também ler um ∠, enunciando apenas a letra do vértice, isto é, dizendo ∠ O. Entretanto, êste

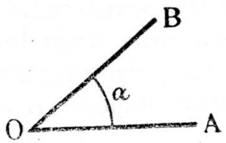


Fig. 1

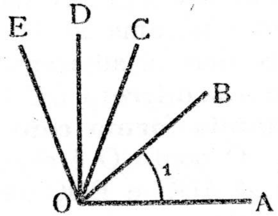


Fig. 2

segundo modo de ler um ângulo pode produzir confusão, como acontece, por exemplo, com a figura geométrica formada pelas cinco semirretas OA, OB, OC, OD e OE (fig. 2). Neste caso é preferível ler um ∠ enunciando as três letras na ordem acima indicada.

Há um modo mais simples de ler ou indicar um ∠; é colocar uma letra minúscula ou um número no interior do mesmo. Assim, diremos ∠ α (alfa, primeira letra do alfabeto grego) em lugar de ∠ AOB (fig. 1); ∠ 1, em lugar de ∠ AOB (fig. 2).

Um ∠ é também uma grandeza e, como tal, pode ser avaliado ou medido. Mas a grandeza de um ∠ não consiste na superfície plana compreendida entre seus lados porque duas semirretas não bastam, evidentemente, para *fechar, limitar* uma porção de plano. Também não consiste no comprimento de seus lados, por-

(*) Convém lembrar que, salvo aviso em contrário, nos referiremos sempre ao ângulo convexo. (E.M.P.V. § 19).

que êstes são semirretas, isto é, têm origem, mas não têm extremidade. O comprimento de cada um dos lados de um ∠ é ilimitado.

Para termos a noção exata da grandeza de um ∠, imaginemos uma semirreta fixa, OA, e uma semirreta móvel, OB, colocada sôbre a primeira, tendo ambas a mesma origem, o ponto O,

Fig. 3

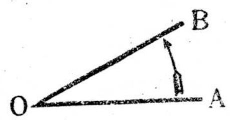


Fig. 4

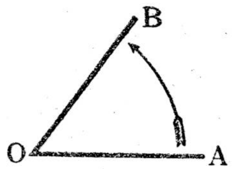


Fig. 5

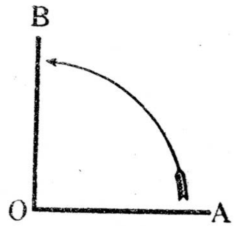


Fig. 6

e o mesmo sentido. Estando as duas semirretas nesta posição (fig. 3) diremos que elas formam *um ângulo nulo*. Agora façamos a semirreta OB girar em tôrno do ponto O, no plano em que estão situadas, como se fosse um ponteiro de relógio, e no sentido indicado pela seta; o ∠ AOB, que era nulo (fig. 3) começa a crescer. (figs. 4, 5 e 6) Quando as duas semirretas ficam dirigidas em sentidos opostos, formando uma reta (fig. 7), dizemos em Geometria que elas estão formando um *ângulo raso* ou *ângulo direito* ou **ângulo de meia volta.**

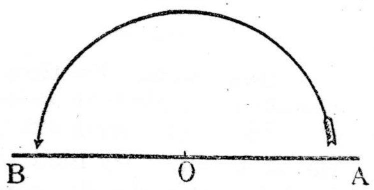


Fig. 7

Continuando a semirreta OB a executar o seu movimento de rotação, o ∠ continua a crescer. (figs.8, 9 e 10) Finalmente, a semirreta OB volta a coincidir com a semirreta OA. (fig. 11) E diremos, neste caso, que as semirretas OA e OB estão formando **um ângulo giro** ou **ângulo de uma volta** ou **perígono.**

Os ∠s podem ser convexos ou côncavos.

Ângulo convexo *é o ângulo menor que o ângulo de meia volta.* (figs. 4, 5 e 6)

Ângulo côncavo *é o ângulo maior que o ângulo de meia volta e menor que o ângulo de uma volta.* (figs. 8, 9 e 10)

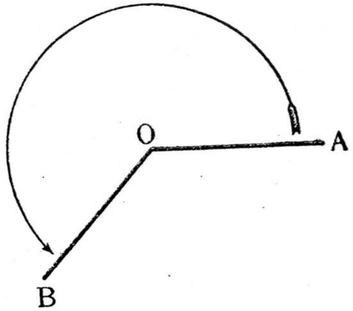


Fig. 8

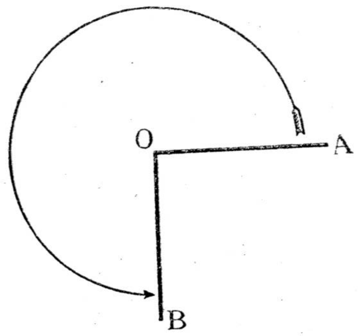


Fig. 9

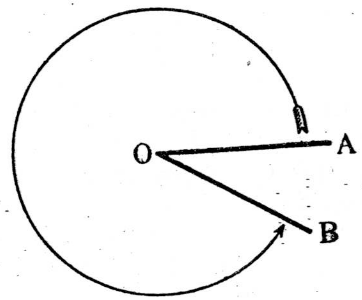


Fig. 10

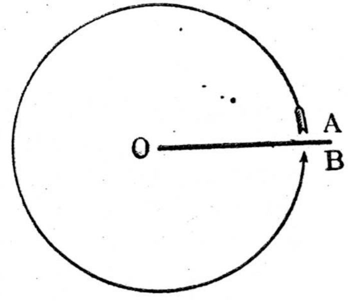


Fig. 11

Observação. Em Geometria, o menor de todos os $\angle$ é o $\measuredangle$ nulo (fig.3); o maior é o $\angle$ de uma volta. (fig.11)

Já aprendemos em que consiste a igualdade ou desigualdade de $\measuredangle$ e como se medem. (E.M.P.V. §§ 21 e 22)

Amplitude de um ângulo é o número que exprime a grandeza dêste mesmo ângulo.

Assim, a amplitude do $\angle$ AOB (fig. 4) é, por exemplo, 40°; a do $\angle$ AOB (fig. 6) é, por exemplo, 90°; etc..

83. Ângulos adjacentes. *Dois ângulos são adjacentes quando têm o mesmo vértice, um lado comum, e estão situados de um lado e do outro do lado comum.*

Consideremos os $\measuredangle$ AOB e BOC. (fig. 12) Ambos têm o mesmo vértice, o ponto O, um lado comum, o lado OB; entretanto, estão situados de um lado e do outro do lado comum OB. São, portanto, $\measuredangle$ adjacentes. Quando dois $\measuredangle$ são adjacentes, os lados não comuns, OA e OC, são chamados *lados exteriores*.

Observação. Pela definição de $\measuredangle$ adjacentes, os $\measuredangle$ AOB e AOC ou BOC e AOC não são adjacentes.

Na figura 12 temos três $\measuredangle$ distintos: os $\measuredangle$ 1, 2 e 3. Em relação a êstes três $\measuredangle$ podemos escrever:

$$\hat{3} = \hat{1} + \hat{2} \qquad \hat{1} = \hat{3} - \hat{2} \qquad \hat{2} = \hat{3} - \hat{1}$$

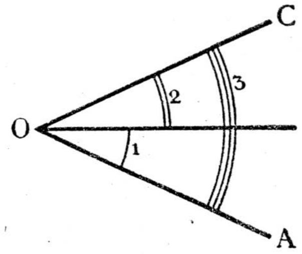


Fig. 12

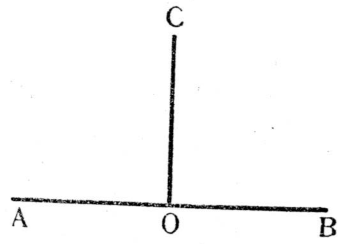


Fig. 13

Dada uma reta AB (fig.13) tracemos, por um ponto qualquer, O, desta reta, uma semirreta OC. A semirreta OC forma com a reta AB, dois $\measuredangle$ adjacentes que podem ser iguais ou desiguais.

Uma semirreta OC (fig.13) é perpendicular a uma reta AB, quando forma com esta reta dois ângulos adjacentes iguais. O ponto O é chamado *pé da perpendicular*.

Os $\measuredangle$ AOC e BOC são chamados *ângulos retos* ou simplesmente, *retos*.

As semirretas OA e OB (fig. 13) formam um $\angle$ raso ou $\angle$ de meia volta. (§ 86) Os $\measuredangle$ AOC e BOC sendo iguais, concluímos de pronto que:

O ângulo reto é a metade de um ângulo de meia volta ou ângulo raso.

Todos os $\measuredangle$ retos são iguais. (E.M.P.V. § 21)

Uma semirreta OC (fig. 14) **é oblíqua a uma reta** AB, **quando forma com esta reta dois ângulos adjacentes desiguais.** O ponto O é chamado *pé da oblíqua*.

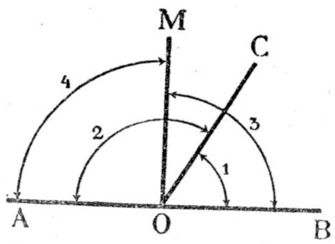


Fig. 14

Os $\measuredangle$ adjacentes AOC e BOC são chamados *ângulos oblíquos*. Pelo

ponto O tracemos OM⊥AB ; já sabemos que os ∡ 3 e 4 são iguais e são chamados *retos*. O ∠ 1 menor que o ∠ 3, é um ∠ agudo ; o ∠ 2 maior que o ∠ 4 é um ∠ obtuso.

Ângulo agudo *é o ângulo oblíquo menor que o ângulo reto.*

Ângulo obtuso *é o ângulo oblíquo maior que o ângulo reto e menor que o ângulo de meia volta.*.

Para concluir êste parágrafo vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA. ***Por um ponto dado em uma reta dada é sempre possível traçar uma semirreta perpendicular à reta dada, e sòmente uma.***

Sejam AB e O, a reta e o ponto dados. Pelo ponto O tracemos uma semirreta qualquer OC. Se esta semirreta formar com AB dois ∡ adjacentes iguais, ela será ⊥ à reta AB, e o teorema estará demonstrado. Entretanto, se a semirreta OC não formar com AB, dois ∡ adjacentes iguais, é evidente que, fazendo a semirreta OC girar em torno do ponto O, como um ponteiro de relógio, no plano da figura, e em sentido conveniente, os dois ∡ adjacentes tornar-se-ão iguais, e teremos OC ⊥ AB.

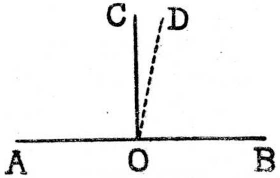


Fig. 15

Resta provar que, pelo ponto O, não podemos traçar outra semirreta ⊥ AB. Suponhamos que OC e OD são ⊥s AB.

Sendo OC ⊥ AB, $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$. Logo, é evidente que $\widehat{AOD} > \widehat{BOD}$. Mas, neste caso, OD não é ⊥ AB.

Sendo OD ⊥ AB, $\widehat{AOD} = \widehat{BOD}$. Logo, é evidente que $\widehat{AOC} < \widehat{BOC}$. Mas, neste caso, OC não é ⊥ AB.

Portanto, pelo ponto O, da reta AB, não é possível traçar mais do que uma semirreta ⊥ à reta AB.

84. **A medida dos ângulos.** O ∠ é uma grandeza e já sabemos em que consiste a grandeza de um ∠. (§82) Para avaliar um ∠ é necessário compará-lo com outro ∠ tomado como unidade. Ora, desde que todos os ∡ retos são iguais, a unidade angular se impõe ; é o *ângulo reto*. Vamos de ∠, a *unidade angular*, se impõe ; é o *ângulo reto*. Vamos medir, por exemplo, o ∠ MNP. (fig.16) Precisamos compará-lo

com o ∠ reto ABC, que é a unidade de ∠. Sendo o ∠ MNP menor do que a unidade, dividimos esta em um número qualquer de partes iguais, por exemplo, em 10. E seja o ∠ ABD ou ∠ *a*, um décimo da unidade. Se o ∠ *a* couber 7 vêzes no ∠ MNP, diremos que o ∠ MNP é igual a 0,7 do ∠ reto e escreveremos :

$$\widehat{MNP} = 0{,}7 \text{ de um reto.}$$

Em geral, o ∠ que se quer medir é menor do que a unidade, isto é, o ∠ reto. Daí a necessidade de se dividir, quasi sempre, o ∠ reto, em um certo número de partes iguais. Na prática é costume dividir o ∠ reto em 90 partes iguais chamadas *graus*. Portanto, um ∠ de um grau é um ∠ igual a 1/90 (um nonagésimo) do ∠ reto. Se um ∠ A mede 37 graus, 28 minutos e 36 segundos, escreveremos abreviadamente :

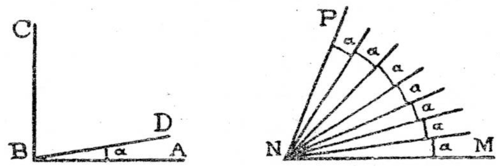


Fig. 16

$$\hat{A} = 37°28'36''$$

Existem outras unidades para medir ∡. (E.M.S.V. § 27)

Observação. E' provável que alguns estudantes observem a analogia existente entre as divisões da ◯ e as do ∠ reto. Oportunamente será dada a explicação necessária.

O ângulo nulo mede zero graus ou zero grados ; o ângulo raso ou ângulo de meia volta mede 180 graus ou 200 grados ; o ângulo giro mede 360 graus ou 400 grados. (*)

85. **Soma de ângulos.** Na fig. 16 o ângulo ABC, formado pelos lados não comuns dos *ângulos adjacentes* ABD e CBD, chama-se *soma* dêsses dois ângulos.

Dados dois ângulos *a* e CBD (fig. 16), para obter a soma, deslocaremos o ângulo *a* de modo que fique adjacente a CBD, como mostra a figura 16, e o ângulo ABC, formado pelos lados exteriores, será a *soma*.

86. **Ângulos complementares e suplementares.** *Dois ângulos são complementares, quando sua soma é igual a um ângulo reto.*

(*) Para a noção de soma e diferença de ângulos, covém reler E. M. P. V. § § 23 e 25.

Da definição de ∡ compls. resulta imediatamente que é sòmente o ∠ agudo que tem complemento. Os ∡ retos e obtusos não têm complemento. E desde que, complemento de um ∠ é o que lhe falta para ser um ∠ reto, resulta também que um ∠ não pode ter dois complementos diferentes. Por exemplo, dado um ∠ de 65°, o seu complemento é um ∠ de 25°. O complemento de um ∠ é uma grandeza perfeitamente definida.

Já aprendemos a construir ou calcular o complemento de um ∠. (E.M.P.V. § 25)

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é igual a dois retos, ou um ângulo de meia volta.

Desta definição resulta que um ∠ qualquer, agudo, reto ou obtuso, tem suplemento. O suplemento de um ∠ reto é, evidentemente, um ∠ reto ; o de um ∠ agudo é um ∠ obtuso, e o de um ∠ obtuso é um ∠ agudo. E desde que, suplemento de um ∠ é o que lhe falta para dois ∡ retos, resulta também que um ∠ não pode ter dois suplementos diferentes. Por exemplo, dado um ∠ de 125°, o seu suplemento é um ∠ de 55°. O suplemento de um ∠ é uma grandeza perfeitamente definida.

Seja o ∠ AOB. (fig.17) De duas maneiras diferentes podemos determinar o suplemento dêste ∠: *construindo-o* ou *calculando-o*. A construção do suplemento do ∠ AOB depende, porém, do seguinte

TEOREMA. ***Quando dois ângulos adjacentes têm seus lados exteriores em linha reta, êstes dois ângulos são suplementares.***

H. { As semirretas OA e OC formam uma reta.   T. { $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 2$ retos.

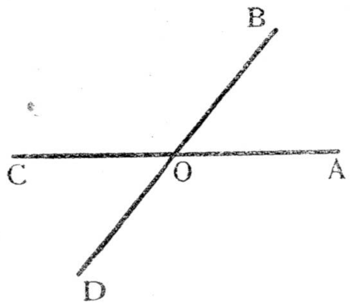


Fig. 17

Com efeito, as semirretas OA e OC estão formando um ∠ de meia volta (§ 82) ; ora, um ∠ de meia volta vale dois retos. (§ 83) E, sendo a soma dos ∡ AOB e BOC igual ao ∠ de meia volta AOC (fig. 17) segue-se que a soma dêstes dois ∡ é igual a dois retos.

Dêste teorema resulta que, dado um ∠ qualquer AOB, para construir o seu suplemento é bastante prolongar o lado OA, além do vértice do mesmo ∠. O suplemento do ∠ AOB será o ∠ BOC. Podemos também prolongar o lado OB além do vértice do mesmo ∠; o ∠ AOD será também o suplemento do ∠ AOB.

Para calcular o suplemento de um ∠, é bastante subtrair o seu valor numérico, *a sua amplitude*, de 180 graus ou 200 grados.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIII.

RECÍPROCA. ***Se dois ângulos adjacentes são suplementares, seus lados exteriores estão em linha reta.***

H. { $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 2$ retos.   T. { As semirretas OA e OB estão em linha reta.

Tratando-se de uma recíproca, vamos demonstrá-la por absurdo. Para isto é necessário negar a tese. Ora, só há uma maneira de negá-la; é afirmar que as semirretas OA e OB (fig. 18) não estão em linha reta, isto é, afirmar que OA não é o prolongamento de OB. Então prolonguemos OB, e seja OA′ êste prolongamento. De acôrdo com o teorema direto, o suplemento do ∠ COB é o ∠ COA′. Mas, por hipótese, o suplemento do ∠ COB é o ∠ COA.

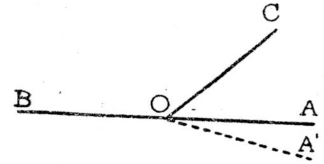


Fig. 18

Entretanto, os ∡ COA′ e COA não são iguais. (E.M.P.V. § 21) Chegamos assim a um absurdo : um ∠ que tem dois suplementos diferentes ! Ora, se a negação da tese nos conduziu a um absurdo, e se não há outra maneira de negá-la, forçoso é aceitá-la e admitir que o prolongamento de BO, isto é, OA′, se confunde com OA.

PRIMEIRO COROLÁRIO. (*) ***A soma de todos os ângulos adjacentes e consecutivos, que se podem formar do mesmo lado de uma reta, e tendo por vértice comum um mesmo ponto desta reta, é igual a dois retos.***

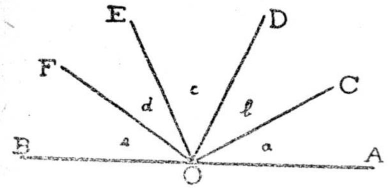


Fig. 19

Seja AB a reta dada e O um ponto qualquer desta reta. (fig. 19) Pelo ponto O tracemos as semir-

(*) *Corolário* é um teorema que aparece como conseqüência imediata de um outro teorema já demonstrado.

retas OC, OD, OE e OF. A soma dos ∡ *a, b, c, d, e*, é, com evidência, igual a dois retos.

SEGUNDO COROLÁRIO. ***A soma de todos os ângulos adjacentes e consecutivos que se podem formar em redor de um mesmo ponto é igual a quatro retos.***

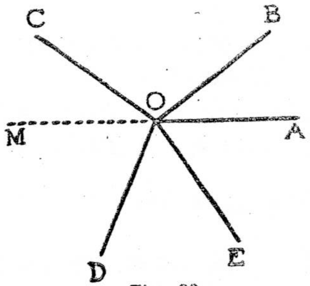


Fig. 20

Sejam AOB, BOC, COD, DOE e EOA os ∡ construídos em redor do ponto O. (fig. 20) Prolonguemos uma das semirretas, por exemplo, OA, e seja OM o seu prolongamento. Ora, de acôrdo com a figura e com o primeiro corolário, teremos :

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}M = 2 \text{ retos}$$

$$M\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 2 \text{ retos}$$

Somando estas duas igualdades e observando que $C\hat{O}M + M\hat{O}D = C\hat{O}D$, teremos :

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 4 \text{ retos} \quad \text{C. Q. D.}$$

TERCEIRO COROLÁRIO. ***Quando uma reta é perpendicular a uma outra, esta outra é por sua vez perpendicular à primeira.***

H. { $BC \perp AB$ T. { $AB \perp BC$

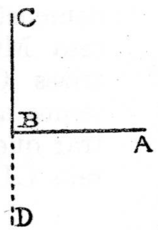


Fig. 21

Para provar que $AB \perp BC$, temos de provar que AB, ao encontrar BC, forma com BC dois ∡ adjacentes iguais. (§ 83) Entretanto AB, ao encontrar BC, forma apenas um ∠, o ∠ ABC. Prolonguemos então BC e seja BD êste prolongamento. Agora AB, ao encontrar BC ou CD, forma com CD dois ∡ adjacentes, os ∡ ABC e ABD. Se provarmos que êstes dois ∡ são iguais, teremos provado que $AB \perp BC$. Ora, êstes dois ∡ são supls. Mas o ∠ ABC é reto, porque $BC \perp AB$. Logo, o ∠ ABD, suplemento do ∠ ABC, também é reto. Se os dois ∡ são retos, são iguais e, nestas condições, a reta AB é, por definição, ⊥ à reta BC.

Dêste corolário resulta que *os lados de um ângulo reto são perpendiculares entre si.*

87. **Bissetriz de um ângulo ; ∡ o. p. v.** *Bissetriz de um ∠ é a semirreta que, tendo por origem o vértice dêste mesmo ∠, o divide em duas partes iguais.* Considerando o ∠ AOD (fig. 19), se a semirreta OC dividir êste ∠ em duas partes iguais, esta semirreta será a bissetriz do ∠ AOD.

Um ∠ qualquer tem evidentemente uma bissetriz e sòmente uma. Aliás, esta verdade pode ser demonstrada, seguindo marcha idêntica à que seguimos na demonstração do teorema do parágrafo 83.

Observação. Veremos oportunamente (§ 100) que a bissetriz de um ∠ é um lugar geométrico.

Dois ∡ opostos pelo vértice são dois ∡ tais, que os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro, além do vértice. Dizer, portanto, que os ∡ AOC e BOD (fig. 22) são o. p. v., é afirmar implìcitamente que AOB e COD são duas retas que se cortam no ponto O. E quando duas retas se cortam (fig. 22) elas formam quatro ∡ que são o. p. v., dois a dois.

TEOREMA. ***Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.***

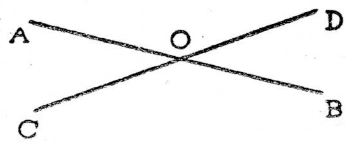


Fig. 22

H. { AOB é uma reta. COD é uma reta. T. { $A\hat{O}C = B\hat{O}D$

Sendo AOB uma reta, a semirreta OD forma com ela dois ∡ adjacentes supls. Portanto, o ∠ AOD é suplemento do ∠ BOD. Sendo COD uma reta, a semirreta OA forma com ela dois ∡ adjacentes supls. Portanto, o ∠ AOD é também suplemento do ∠ AOC. Ora, se os ∡ BOD e AOC têm o mesmo suplemento, isto é, o ∠ AOD, conclue-se que êles são iguais. De um módo ánalogo provaríamos que os ∡ AOD e BOC, o. p. v., são também iguais.

A recíproca, isto é, dois ∡ iguais são o. p. v., não é, evidentemente, verdadeira.

PRIMEIRO COROLÁRIO. ***Se dois ângulos AOC e BOD*** (fig. 22) ***na posição de o. p. v. são iguais, assim como os***

ângulos AOD e COB, os pontos A, O, B, estão em linha reta, assim como os pontos C, O, D.

H. $\begin{cases} A\hat{O}C = B\hat{O}D \\ A\hat{O}D = B\hat{O}C \end{cases}$ T. $\begin{cases} \text{AOB é uma reta.} \\ \text{COD é uma reta.} \end{cases}$

Com efeito,

$$A\hat{O}C + C\hat{O}B + B\hat{O}D + D\hat{O}A = 4 \text{ retos} \quad (\S 89, \text{ 2.º corolário})$$

Mas, $A\hat{O}C + B\hat{O}D = 2 \times A\hat{O}C$ (hip.)

$C\hat{O}B + D\hat{O}A = 2 \times C\hat{O}B$ (hip.)

Logo, $2 \times A\hat{O}C + 2 \times C\hat{O}B = 4 \text{ retos} \quad \therefore$

$$A\hat{O}C + C\hat{O}B = 2 \text{ retos}$$

Ora, se os ∡ adjacentes AOC e COB são supls., seus lados exteriores, isto é, AO e OB estão em linha reta. (§86, recíproca) Portanto, AOB é uma reta. De modo análogo se provará que COD é também uma reta.

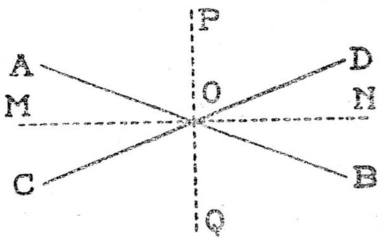


Fig. 23

SEGUNDO COROLÁRIO. ***Se dois ângulos, na posição de o. p. v. são iguais, e dois lados estão em linha reta, os outros dois também estão em linha reta.*** (fig. 23)

H. $\begin{cases} A\hat{O}C = B\hat{O}D \\ \text{AOB é uma reta.} \end{cases}$

T. $\{ \text{COD é uma reta.}$

Sendo AOB uma reta (hip.) os ∡ adjacentos AOD e BOD são supls.; logo,

$$A\hat{O}D + B\hat{O}D = 2 \text{ retos} \qquad (1)$$

Mas, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ (hip.). Substituindo em (1)...

$$A\hat{O}D + A\hat{O}C = 2 \text{ retos}$$

Mas, êstes dois ∡, além do serem supls. são adjacentes; logo, seus lados exteriores, OC e OD estão em linha reta. (§86, recíproca)

TERCEIRO COROLÁRIO. ***As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão em linha reta.*** (fig. 23)

H. $\begin{cases} \text{AOB é uma reta.} \\ \text{COD é uma reta.} \\ \text{OM é bissetriz de } A\hat{O}C. \\ \text{ON é bissetriz de } B\hat{O}D. \end{cases}$ T. $\{ \text{MON é uma reta.}$

Sendo AOB e COD duas retas que se cortam no ponto O, os ∡ AOC e BOD, o. p. v., são iguais. Portanto,

$$A\hat{O}C = B\hat{O}D \quad \therefore \quad \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{B\hat{O}D}{2}$$

Mas, a metade do ∠AOC é o ∠AOM, e a metade do ∠BOD é o ∠BON. (hip.) Logo:

$$A\hat{O}M = B\hat{O}N$$

∴ Ora, êstes dois ∡ estão na posição de o. p. v.; são iguais, e dois de seus lados, OA e OB, estão em linha reta. Portanto, de acôrdo com o segundo corolário, os outros dois lados, OM e ON, também estão em linha reta, isto é, MON é uma reta, como queríamos demonstrar.

QUARTO COROLÁRIO. ***Se duas retas AB e CD*** (fig. 23) ***se cortam formando assim quatro ângulos o. p. v. dois a dois, as quatro bissetrizes formam duas retas perpendiculares entre si.***

Sejam OP e OQ as bissetrizes dos ∡ AOD e BOC. Já demonstrámos que as bissetrizes OM e ON formam uma única reta MON. De modo análogo demonstraremos que as bissetrizes OP e OQ formam também uma única reta POQ. Queremos agora demonstrar que $PQ \perp MN$. E' bastante demonstrar que o ∠ MOP é reto. Ora, a semirreta OA forma com a reta CD dois ∡ adjacentes supls.; portanto,

$$A\hat{O}C + A\hat{O}D = 2 \text{ retos} \quad \therefore$$

$$\frac{A\hat{O}C}{2} + \frac{A\hat{O}D}{2} = 1 \text{ reto}$$

Mas a metade do ∠ AOC é o ∠ MOA, e a metade do ∠ AOD é o ∠ AOP. Logo,

$$\widehat{MOA} + \widehat{AOP} = 1 \text{ reto} \quad \therefore \quad \widehat{MOP} = 1 \text{ reto}$$

Se o $\angle$ MOP é reto, OP $\perp$ MO ou PQ $\perp$ MN, como queríamos demonstrar.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIII.

88. **Rotações de semiplanos.** A figura PQRS (fig. 24) representa um plano. A reta MN, traçada neste plano, divide-o em duas porções distintas, em dois *semiplanos*, aos quais podemos chamar de *semiplano direito* e *semiplano esquerdo.*

Consideremos duas semirretas quaisquer AB e AC, traçadas no plano PQRS, a primeira situada no semiplano direito, e a segunda no esquerdo. Façamos o semiplano direito girar em tôrno de MN (que fica imóvel, como um eixo fixo de rotação), até coincidir com o semiplano esquerdo. E agora pergunta-se: *A semirreta* AB *coincidirá, em direção, com a semirreta* AC?

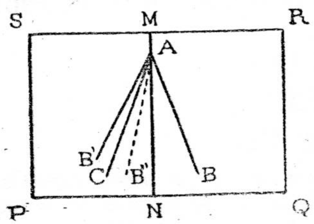


Fig. 24

As semirretas AB e AC formam com a semirreta AN, os dois $\measuredangle$ adjacentes BAN e CAN. Durante o movimento de rotação do semiplano direito, em torno de MN, o lado AN, comum aos dois $\measuredangle$ adjacentes CAN e BAN, não muda de posição, porque está situado no eixo de rotação MN. Isto pôsto, vamos responder à pergunta acima formulada.

Se o $\angle$ BAN for igual ao $\angle$ CAN, quando o semiplano direito coincidir com o esquerdo, *a semirreta AB coincidirá, em direção, com a semirreta AC.*

Se o $\angle$ BAN for maior ou menor que o $\angle$ CAN, quando o semiplano direito coincidir com o esquerdo, *a semirreta AB não coincidirá, em direção, com a semirreta AC* e tomará a posição AB′ ou AB″. (*)

Portanto, para que AB coincida com AC, é necessário que os $\measuredangle$ formados com o eixo de rotação, sejam iguais.

(*) Seria conveniente que estas explicações fossem dadas de um modo concreto, com uma fôlha de papel mais ou menos transparente.

Suponhamos agora que AB e AC são dois segmentos iguais, e façamos o semiplano direito girar em tôrno de MN, até coincidir com o esquerdo. O segmento AB coincidirá, em direção, com o segmento AC? *Sim,* responderá um aluno distraído, *porque os dois segmentos são iguais, por hipótese. Nem sempre,* responderá um aluno atento; desta vez a igualdade dos dois segmentos AB e AC não é condição suficiente para que êles coincidam; a primeira condição para que se verifique a coincidência dos dois segmentos, é que êles formem $\measuredangle$ iguais com o eixo MN. Uma vez preenchida esta condição, então, se os dois segmentos forem iguais, o ponto B coincidirá com o ponto C, e os dois segmentos coincidirão.

Portanto, para que os dois *segmentos iguais* AB e AC *coincidam,* é necessário, *em primeiro lugar,* que êles formem $\measuredangle$ iguais com o eixo de rotação.

No plano PQRS (fig. 25) tracemos uma reta qualquer MN, e uma reta AB $\perp$ MN no ponto O. A reta MN divide o plano PQRS em dois semiplanos. Sejam C e D dois pontos quaisquer situados na $\perp$ AB. Vejamos quais as condições necessárias para que, fazendo girar o semiplano direito em tôrno de MN, até coincidir com o esquerdo, o ponto C coincida com o ponto D. *A primeira condição* é que os $\measuredangle$ MOB e MOA sejam iguais. Ora, esta condição está preenchida, porque, sendo MO $\perp$ AB, os dois $\measuredangle$ são iguais. *A segunda condição* é que o segmento OC seja igual ao segmento OD. Se tivermos OC < OD, o ponto C tomará a posição D′; se tivermos OC > OD, o ponto C tomará a posição D″.

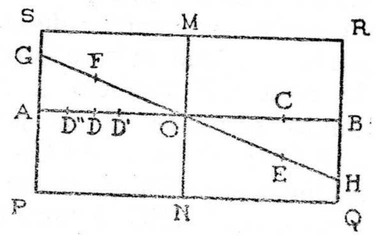


Fig. 25

89. **Perpendiculares e oblíquas.** Teorema fundamental. ***Por um ponto tomado fora de uma reta, podemos traçar sempre uma perpendicular a esta reta, e sòmente uma.***

Seja AB a reta dada e C o ponto dado. (fig. 26) A reta AB, suposta horizontal, divide o plano em que ela se acha, em dois

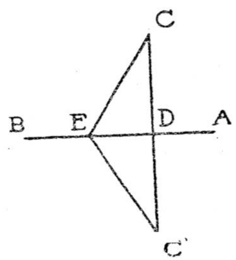


Fig. 26

semiplanos: o superior e o inferior. Façamos o semiplano superior girar em tôrno de AB, até coincidir com o semiplano inferior. Então, o ponto C tomará a posição C'. Em seguida, façamos o semiplano superior voltar à sua posição primitiva, e tracemos o segmento CC'. Formaremos assim os dois ∡ adjacentes ADC e ADC'. Vamos demonstrar que êstes dois ∡ são iguais.

Façamos o semiplano superior girar novamente em tôrno de AB, até coincidir com o inferior. O lado AD, comum aos dois ∡ adjacentes ADC e ADC', não muda de posição; o ponto C coincide com o ponto C'; então o lado DC do $\angle$ADC coincide com o lado DC' do $\angle$ADC'. Logo, o $\angle$ ADC coincide com o $\angle$ ADC' e êstes dois ∡ são, por consequência, iguais.

Ora, se a reta AB forma com a reta CC' dois ∡ adjacentes iguais, AB $\perp$ CC' (§83), ou CC' $\perp$ AB. Está, portanto, demonstrada a primeira parte de nossa tese. Passemos à segunda parte, que vamos demonstrar pela redução ao absurdo. Suponhamos que seja possível traçar, pelo ponto C, uma segunda reta CE também $\perp$ AB. Então o $\angle$ AEC será reto. Ligando o ponto E ao ponto C' formaremos um segundo $\angle$ AEC', igual ao $\angle$ AEC, como é fácil de provar, fazendo o semiplano superior girar em tôrno de AB, etc.. Ora, se o $\angle$ AEC é reto, o $\angle$ AEC' é também um $\angle$ reto. Logo, *êstes dois ∡ são supls.* Mas, *êstes dois ∡ são adjacentes;* neste caso, *seus lados exteriores estão em linha reta* (§86, recíproca); CEC' é uma reta. E teremos assim duas retas distintas, CDC' e CEC', passando por dois pontos dados, C e C', o que é impossível, é absurdo. Nestas condições, CE não pode ser $\perp$ à AB.

PRIMEIRO TEOREMA. ***Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e uma oblíqua a esta mesma reta, a perpendicular será menor do que a oblíqua.*** (fig. 26)

H. $\begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \end{cases}$ T. $\{ CD < CE$

Prolonga-se o segmento CD até que o prolongamento DC' seja igual a CD. Liga-se o ponto E ao ponto C'. Em seguida, faz-se o semiplano superior girar em tôrno de AB até coincidir com o inferior. O $\angle$ ADC sendo reto, por hipótese, seu suplemento, o $\angle$ ADC' também é reto. Logo, os ∡ ADC e ADC' são iguais. Nestas condições, o segmento DC coincide, em direção, com o segmento DC'. (§88) E sendo DC = DC' por construção, o ponto C coincide com o ponto C'. Se o ponto E permanece imóvel, no eixo de rotação, e se o ponto C coincide com o ponto C', conclue-se que o segmento EC é também igual ao segmento EC'.

Ora, o caminho mais curto entre dois pontos, é o segmento retilíneo que os une; portanto,

$$CD + DC' < CE + EC'$$

Mas, $$CD = DC' \text{ e } CE = EC' \quad \therefore$$

$$2CD < 2CE \;\therefore\; CD < CE$$

Observação. Podemos traçar uma infinidade de segmentos, ligando o ponto C a qualquer ponto da reta AB. Desta infinidade de segmentos, o mais curto, o menor, é o segmento $\perp$ à reta AB. A êste segmento dá-se o nome de *menor distância do ponto C à reta AB*, ou simplesmente *distância do ponto C à reta AB*. Desde que, por um ponto, tomado fora de uma reta, só é possível traçar um segmento $\perp$ a esta reta, e sendo êste segmento menor do que qualquer outro segmento que ligue o mesmo ponto à mesma reta, segue-se que a distância de um ponto a uma reta é uma grandeza perfeitamente determinada. ***Entre um ponto e uma reta não há duas distâncias diferentes.***

SEGUNDO TEOREMA. ***Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e duas oblíquas, cujos pés se afastem igualmente do pé da perpendicular, as duas oblíquas serão iguais.*** (fig. 27)

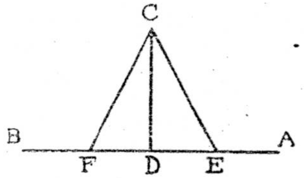


Fig. 27

H. $\begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ DE = DF \end{cases}$

T. $\{ CE = CF$

Sendo CD $\perp$ AB, os ∡ CDA e CDB são iguais. A reta CD divide o plano onde está a figura, em dois semiplanos. Façamos o semiplano direito girar em tôrno de CD, até coincidir com o semiplano esquerdo. Sendo $C\hat{D}A = C\hat{D}B$ (hip.), a semirreta DA

coincide, em direção, com a semirreta DB, e sendo DE = DF (hip.), o ponto E coincide com o ponto F. Se o ponto C não muda de posição, e se o ponto E coincide com o ponto F, o segmento CE coincide com o segmento CF. Logo, CE = CF.

TERCEIRO TEOREMA. ***Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e duas oblíquas, cujos pés se afastem desigualmente do pé da perpendicular, as duas oblíquas serão desiguais, e a oblíqua maior será aquela cujo pé se afastar mais do pé da perpendicular.*** (fig. 28)

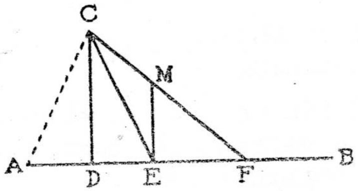


Fig. 28

$$H. \begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ DF > DE \end{cases}$$

$$T. \{ CF > CE$$

Pelo ponto E traçamos o segmento $ME \perp AB$. Estando o ponto E situado entre os pontos D e F, devido à hipótese (DF > DE), a ⊥ ME encontra necessàriamente a oblíqua CF no ponto M. Ora, o caminho mais curto entre dois pontos, é o segmento retilíneo que os une; portanto,

$$CE < CM + ME.$$

Sendo ME < MF, (primeiro teorema), com mais razão

$$CE < CM + MF$$

Porém, CM + MF = CF (figura).

Logo, $CE < CF \quad \therefore \quad CF > CE$

Observação. Se, em lugar da oblíqua CE, fosse dada a oblíqua CA, seria necessário, antes de iniciar esta demonstração, substituir a oblíqua CA pela oblíqua igual CE.

Observação. Podemos traçar uma infinidade de segmentos, ligando o ponto C à reta AB. (figs. 26, 27 e 28) O menor é o segmento ⊥ à AB, isto é, CD, e êste segmento não tem igual. Os segmentos oblíquos serão sempre maiores do que o segmento ⊥, e serão iguais *dois a dois. Em uma reta dada AB existem sempre dois pontos eqüidistantes de um ponto C situado fora da reta, e sòmente dois.* Por exemplo, os segmentos CA e CE (fig. 28) podem ser iguais, mas os segmentos CA, CE e CF nunca podem ser iguais.

Exercício. Traçar uma reta AB e determinar um ponto C situado a 5cm de AB; determinar, em AB, dois pontos situados a 7cm do ponto C; três pontos situados a 10cm do ponto C; dois pontos situados a 4cm do ponto C.

RECÍPROCA DO PRIMEIRO TEOREMA. ***Se o segmento CD representa a distância do ponto C à reta AB, CD é perpendicular à AB.*** (fig. 26)

$$H. \begin{cases} CD \text{ é a distância do ponto} \\ \quad C \text{ à reta } AB. \end{cases} \qquad T. \{ CD \perp AB$$

Neguemos a tese, suponhamos que CD não é ⊥ AB, e que CE ⊥ AB. Neste caso, teremos CE < CD, e CE será a distância do ponto C à reta AB (teorema direto). Mas, CD é também a distância do ponto C à reta AB (hip.). Entretanto, CE < CD. Chegamos assim a um absurdo: entre o ponto C e a reta AB há duas distâncias diferentes! Logo, desde que CD não pode ser oblíqua à AB, tem de ser ⊥.

RECÍPROCA DO SEGUNDO TEOREMA. ***Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular CD e duas oblíquas iguais CE e CF, os pés destas oblíquas distarão igualmente do pé da perpendicular.*** (fig. 27)

$$H. \begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ CE = CF \end{cases}$$

$$T. \{ DE = DF$$

Suponhamos DE > DF. Resulta CE > CF (terceiro teorema), conclusão absurda, porque é contrária à hipótese.

Suponhamos DE < DF. Então, CE < CF (terceiro teorema), o que é absurdo, por ser uma conclusão contrária à hipótese.

Não sendo possível DE > DF ou DE < DF, é necessário aceitar a tese, isto é, DE = DF.

Em particular, CE e CF, estando situadas do mesmo lado da ⊥ CD, e sendo iguais, seus pés, isto é, os pontos E e F, coincidem. (fig. 27)

RECÍPROCA DO TERCEIRO TEOREMA. ***Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular CD e duas oblíquas desiguais CE e CF, seus pés distarão desigualmente do pé da perpendicular, e a distância maior corresponderá à oblíqua maior.*** (fig. 28)

$$\text{H.}\begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ CF > CE \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ DF > DE$$

Suponhamos DF = DE. Resulta CF = CE (segundo teorema) conclusão absurda, porque é contrária à hipótese.

Suponhamos DF < DE. Então, CF < CE (terceiro teorema), o que é absurdo, por ser uma conclusão contrária à hipótese.

Não sendo possível DF = DE ou DF < DE, é necessário aceitar a tese, isto é, DF > DE.

90. A mediatriz. *Mediatriz de um segmento retilíneo dado AB é a perpendicular ao segmento dado, e que divide êste mesmo segmento em duas partes iguais.*

Seja AB (fig. 29) o segmento dado; traçando MN ⊥ AB e passando pelo meio de AB, a reta MN será a *mediatriz do segmento* AB. E' útil observar que a mediatriz de um segmento é uma reta, isto é, ilimitada nos dois sentidos.

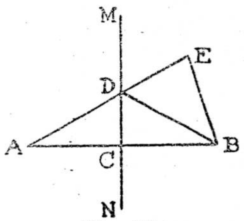


Fig 29

TEOREMA. ***Qualquer ponto da mediatriz de um segmento dado AB dista igualmente dos pontos A e B.***

Traça-se a mediatriz MN do segmento AB e toma-se um ponto qualquer D da mediatriz. Em seguida, traçam-se os segmentos DA e DB.

$$\text{H.}\begin{cases} MN \perp AB \\ CA = CB \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ DA = DB$$

Com efeito, DA e DB são iguais porque são duas oblíquas em relação à reta AB, cujos pés, A e B, distam igualmente do pé da ⊥ AC. (§ 89, segundo teorema)

TEOREMA RECÍPROCO. ***Se um ponto D dista igualmente de dois pontos A e B, êle está situado na mediatriz do segmento AB.*** (fig. 29)

Liga-se o ponto A ao ponto B, liga-se o ponto D aos pontos A e B e, pelo ponto D, traça-se DC ⊥ AB.

$$\text{H.}\begin{cases} DA = DB \\ DC \perp AB \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ \text{O ponto D está na mediatriz do segmento AB.}$$

Sendo DC ⊥ AB, os segmentos DA e DB são oblíquos. Mas estas oblíquas são iguais, por hipótese. Logo, seus pés distam igualmente do pé da ⊥ DC (§ 89, recíproca do segundo teorema), donde CA = CB. Ora, sendo DC ou MN ⊥ AB no ponto C, e sendo CA = CB, conclue-se que MN é a mediatriz do segmento AB e que o ponto D está situado nesta mediatriz.

TEOREMA CONTRÁRIO. ***Um ponto situado fora da mediatriz de um segmento AB, não dista igualmente dos pontos A e B.*** (fig. 29)

Traça-se o segmento AB e a mediatriz MN. Toma-se um ponto qualquer E fora da mediatriz, e liga-se o mesmo aos pontos A e B.

$$\text{H.}\begin{cases} \text{MN é a mediatriz do segmento AB;} \\ \text{o ponto E não está na mediatriz.} \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ EA > EB$$

Se o ponto E não está na mediatriz, um dos segmentos EA ou EB corta a mediatriz. Seja EA o segmento que corta a mediatriz no ponto D, e tracemos o segmento DB.

Ora, EB < ED + DB (por que?)

Mas, estando D na mediatriz de AB, DB = DA. Logo,

$$EB < ED + DA$$

Porém, ED + DA = EA (figura). Portanto,

$$EB < EA \;\therefore\; EA > EB$$

91. A mediatriz é um lugar geométrico. Seja MN a mediatriz de um segmento dado, AB. (fig. 29) Ficou provado que um ponto qualquer da reta MN dista igualmente dos pontos A e B, ao passo que um ponto qualquer situado fora da reta MN não dista igualmente dos pontos A e B. Todos os pontos da reta MN gozam, portanto, de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence, absolutamente, aos pontos situados fora da reta MN. Logo, a reta MN ⊥ AB, e passando pelo meio de AB, *é um lugar geométrico.*

Lugar geométrico *é um conjunto de pontos que gozam todos de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence aos pontos situados fora dêste mesmo conjunto.*

Existem numerosos lugares geométricos, cujo conhecimento facilita sobremaneira a resolução dos problemas. Por enquanto conhecemos apenas um: *a mediatriz de um segmento retilíneo.*

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos dados A e B, é a mediatriz do segmento retilíneo AB.

Quando, na resolução de um problema qualquer de Geometria, necessitarmos de um ponto igualmente distante de dois pontos dados A e B, não devemos hesitar; tracemos imediatamente a mediatriz do segmento AB ; **é nela, e sòmente nela,** que existem pontos igualmente distantes dos pontos A e B.

Exercícios em classe

Observação. Nestes exercícios não é permitido o uso do esquadro.

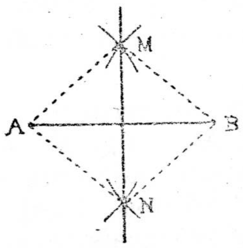


Fig. 30

I. Construir a mediatriz de um segmento dado. Seja AB o segmento dado. Fazendo centro nos pontos A e B, traçam-se dois arcos que se cortem, determinando assim o ponto M. O raio dêstes arcos pode ser qualquer, porém *deve ser o mesmo* para os dois arcos. Sendo o raio AM igual ao raio BM, o ponto M é eqüidistante dos pontos A e B e, por conseqüência, está na mediatriz pedida. De um modo análogo, determina-se um segundo ponto da mediatriz, o ponto N. Em seguida, traça-se a reta MN. Esta reta contém os pontos M e N, situados na mediatriz do segmento AB. Ora, por dois pontos dados, M e N, só é possível traçar uma reta. Logo a reta MN é a mediatriz do segmento dado.

II. Traçar uma ⊥ a um segmento dado, e que passe pelo centro do mesmo segmento.

III. Dividir um segmento dado em duas partes iguais.

IV. Dividir um segmento AB em 4, 8, 16, ..., etc., partes iguais, enfim, em um número de partes iguais dado pela expressão 2^n.

V. Traçar uma ⊥ a uma reta dada, por um ponto dado nesta reta. Seja AB a reta dada (fig. 27) e D o ponto dado. Tomam-se na reta AB, à direita e à esquerda do ponto D, dois segmentos iguais, DE e DF. O ponto D será o meio do segmento EF. Em seguida traça-se a mediatriz do segmento EF.

VI. Traçar uma ⊥ ao segmento AB, pelo ponto B.

VII. Traçar uma ⊥ a uma reta dada por um ponto dado fora da reta.

Seja AB a reta dada (fig. 31) e C o ponto dado. Fazendo centro em C e com um raio qualquer, traça-se um arco que corte a reta AB em dois pontos M e N ; o ponto C, sendo eqüidistante dos pontos M e N, está na mediatriz do segmento MN. Em seguida determina-

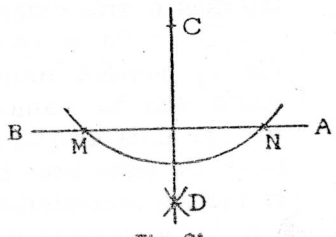


Fig. 31

se um outro ponto D, também eqüidistante dos pontos M e N. (problema I) Unindo o ponto C ao ponto D, a reta CD será a mediatriz do segmento MN e, por conseqüência, será ⊥ à reta AB.

VIII. Determinar na reta AB (fig. 32) um ponto eqüidistante dos pontos M e N.

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos pontos M e N é a mediatriz do segmento MN. Portanto, se o ponto pedido existe, êle está nesta mediatriz. Liga-se então o ponto M ao ponto N e traça-se a mediatriz do segmento MN. Esta mediatriz, CD, encontra a reta AB no ponto E, que é o ponto pedido.

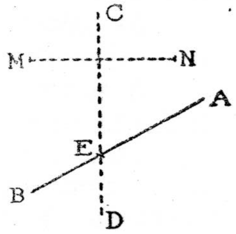


Fig. 32

IX. Em uma ○ dada, determinar um ponto eqüidistante de dois pontos dados e situados fora da ○.

X. Determinar um ponto eqüidistante de três pontos dados A, B e C, não situados em linha reta.

92. Polígonos. Consideremos três ou mais pontos A, B, C, D, E, situados em um mesmo plano, e de modo que, na ordem em que estão sendo considerados, três pontos consecutivos quaisquer não estejam em linha reta. (fig. 33)

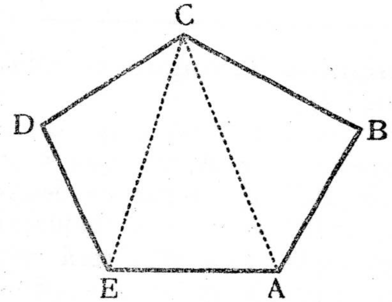


Fig. 33

Tracemos os segmentos retilíneos que unem o ponto A ao ponto B, o ponto B ao ponto C, o ponto C ao ponto D, o ponto D ao ponto E e, finalmente, o último ponto, E, ao primeiro, A. A figura assim constituída é chamada **polígono.**

Os pontos A, B, C, D e E são os **vértices do polígono ;** os segmentos AB, BC, CD, etc., são os **lados ;** os ângulos formados por dois lados consecutivos são os **ângulos do polígono.**

Um polígono tem tantos vértices e tantos ∡ quantos são os seus lados.

Diagonal *de um polígono é o segmento retilíneo que une dois vértices não consecutivos do mesmo polígono.* Os segmentos AC e EC (fig. 33) são diagonais.

Ângulo interno *de um polígono ou simplesmente* **ângulo** *de um polígono, é o ângulo formado por dois lados consecutivos do*

mesmo polígono e cuja abertura fica voltada para o interior do polígono. Os ∡ ABC, CBD, etc., (fig. 33) são ∡ do polígono.

Ângulo externo *de um polígono é o ângulo formado por um de seus lados e pelo prolongamento do lado consecutivo.*

Contôrno *de um polígono é o conjunto de seus lados.*

Perímetro *de um polígono é a soma dos comprimentos de seus lados.*

As palavras *polígono* e *perímetro*, de origem grega, significam respectivamente *numerosos ângulos* e *medida em tôrno*.

A superfície de um polígono é a porção de superfície plana limitada pelo contôrno do polígono.

Com a palavra *polígono* tanto podemos designar o seu contôrno, como a porção de superfície plana, limitada por êste mesmo contôrno. E diremos de um modo bastante simples que:

Polígono é uma porção de superfície plana limitada por três ou mais segmentos retilíneos e consecutivos. (*)

93. Triângulos. Triângulo *é o polígono de três lados.* (fig.34)

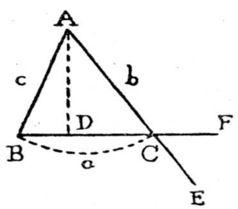


Fig. 34

O lado BC não é lado do ∠ A; diremos então que é *oposto* ao ∠ A, ou que o ∠ A é *oposto* ao lado BC. Em lugar de designar os lados do △ ABC com duas maiúsculas, e dizer, por exemplo, *lado* BC, será necessário, às vêzes, designá-lo por uma minúscula. Mas, esta minúscula não será qualquer; será sempre a minúscula correspondente à letra que está designando o vértice do ∠ oposto. E diremos então *lado* BC ou *lado* **a**, *lado* AC ou *lado* **b**, *lado* AB ou *lado* **c**.

Em um △ qualquer ABC, um lado e um ∠ se dizem *adjacentes*, quando o lado do △ é também lado do ∠. O ∠ B é adjacente ao lado BC; o lado AB é adjacente ao ∠ B; os ∡ B e C são adjacentes ao lado BC.

(*) O polígono que acabámos de definir é o polígono plano e convexo. Veremos oportunamente a diferença entre polígonos convexos e côncavos, planos e reversos. Salvo aviso em contrário, com a palavra *polígono* designaremos sempre o polígono plano e convexo.

Base *de um △ é qualquer um de seus lados.* **Altura** *de um △ é o segmento ⊥ à base, traçado pelo vértice oposto à mesma base.* Assim, tomando como base do △ ABC o lado BC, a altura será o segmento AD, ⊥ à base BC, e traçado pelo ponto A.

Um △ tendo três lados, tem três bases e três alturas.

Mediana *de um △ é o segmento retilíneo que liga um vértice qualquer do △ ao meio do lado oposto.* Portanto, um △ tem três medianas.

Ceviana *de um △ é o segmento retilíneo que liga um vértice qualquer do △ a um ponto qualquer interno do lado oposto.* As alturas, as bissetrizes internas e as medianas de um △ são cevianas particulares.

Ângulo externo *de um △ é o ∠ formado por um de seus lados com o prolongamento do lado contíguo.* O ∠ ACF (fig. 34), é um ∠ externo do △ ABC. O ∠ ACF e o ∠ interno adjacente ACB são supls. (§86) Com o mesmo vértice C há dois ∡ externos ao △ ABC: os ∡ ACF e BCE. Êstes dois ∡ são iguais por serem o. p. v. (§87); cada um dêles tem a sua bissetriz, mas estas bissetrizes formam uma mesma reta (§87)

Bissetriz *de um △ é o segmento da bissetriz de qualquer um de seus ângulos, segmento êste que tem por origem o vértice do ∠ e, por extremidade, o ponto em que a bissetriz encontra o lado oposto ao mesmo ∠.*

No △ ABC (fig. 35) a bissetriz do ∠ ACB é a semirreta CMX; mas a bissetriz do △ ABC é o segmento CM. Oportunamente trataremos das bissetrizes dos ∡ externos de um △. Um △ tem três bissetrizes internas e três externas.

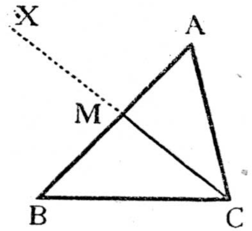


Fig. 35

De tudo o que dissemos resulta que um △ contém numerosos elementos. Para maior clareza vamos dividir êstes elementos em dois grupos: *elementos principais* e *elementos secundários*. Os elementos principais são os três lados e os três ∡. Os elementos secundários são as alturas, as medianas, as bissetrizes internas e externas, as mediatrizes de seus lados, **as cevianas**, etc..

94. O triângulo isósceles. *O triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.* (E.M.P.V. §31) No $\triangle$ isósceles é habitual tomar como base o lado que não tem igual, isto é, o lado BC. (fig. 36) Então a altura será o segmento AM, $\perp$ à base, e tendo por extremidades o vértice A, oposto à base BC, e um ponto M desta mesma base.

TEOREMA. ***Em um triângulo isósceles, aos lados iguais se opõem ângulos iguais.***

Isto quer dizer que, *quando dois lados de um $\triangle$ são iguais, os $\measuredangle$ opostos a êstes dois lados são também iguais.*

H. $\{$ AB = AC T. $\{ \hat{C} = \hat{B}$

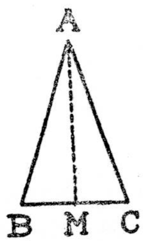


Fig. 36

Façamos o $\triangle$ ABC girar sôbre si mesmo, de modo que o $\angle$ A volte a ocupar a sua posição primitiva. O lado AC coincidirá exatamente em direção e grandeza com seu igual AB e êste, por sua vez, coincidirá exatamente, também em direção e grandeza, com seu igual AC. Então o lado CB ficará invertido, coincidindo com a sua posição primitiva BC. Donde resulta que o $\angle$ C coincidirá com o $\angle$ B.

Logo, $\hat{C} = \hat{B}$

RECÍPROCA. ***Se dois ângulos de um triângulo são iguais, os lados opostos a êstes ângulos são também iguais, e o triângulo é isósceles.***

H. $\{ \hat{B} = \hat{C}$ T. $\{$ AB = AC

Façamos o $\triangle$ ABC girar sôbre si mesmo, de modo que o lado invertido CB coincida com a sua posição primitiva BC. Sendo $\hat{B} = \hat{C}$ (hip.) o lado CA coincidirá em direção com o lado BA, e o lado BA coincidirá também em direção com o lado CA. O ponto A, devendo coincidir com um ponto situado em BA e um ponto situado em CA, coincidirá necessàriamente com o ponto A. Donde resulta que CA coincide também em grandeza com BA, e BA com CA. Logo, AB = AC

COROLÁRIO. ***O triângulo equilátero é equiângulo, e recìprocamente.***

Sejam A, B e C os três ângulos do triângulo; os lados respectivamente opostos serão a, b, e c. (§93)

H. $\{ a = b = c$ T. $\{ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

Sendo $a = b$, teremos $\hat{A} = \hat{B}$ (teorema direto) (1)

Sendo $a = c$, teremos $\hat{A} = \hat{C}$ (teorema direto) (2)

Combinando (1) e (2) resulta:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

H. $\{ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ T. $\{ a = b = c$

Sendo $\hat{A} = \hat{B}$, teremos $a = b$ (teorema recíproco) (1)

Sendo $\hat{A} = \hat{C}$, teremos $a = c$ (teorema recíproco) (2)

Combinando (1) e (2) resulta:

$$a = b = c$$

TEOREMA. ***Em um triângulo qualquer, ao maior ângulo se opõe o maior lado.***

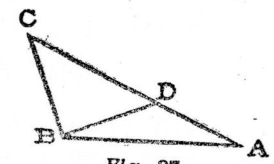


Fig. 37

H. $\{ \hat{B} > \hat{A}$ T. $\{$ AC > BC

Consideremos o $\triangle$ ABC (fig. 37). Sendo $\hat{B} > \hat{A}$, vamos traçar no interior do $\angle$ B um segmento BD que forme com BA um $\angle$ ABD igual ao $\angle$ A. Então o $\triangle$ ABD será isósceles $\therefore$ AD=BD.

O segmento BC é a menor distância entre os pontos B e C. Logo BC < CD + BD. Mas BD=AD $\therefore$ BC < CD + AD. $\therefore$ BC < AC $\therefore$ AC > BC.

RECÍPROCA. ***Em um triângulo qualquer, ao maior lado se opõe o maior ângulo.***

Vamos demonstrar esta recíproca pela redução ao absurdo. A figura é inútil, porque já sabemos designar convenientemente os lados e os $\measuredangle$ de um $\triangle$.

H. $\{ a > b$

T. $\{ \hat{A} > \hat{B}$

Suponhamos $\hat{A} < \hat{B}$; resulta $a < b$, de acôrdo com o teorema direto, o que é absurdo, porque é contrário à hipótese.

Suponhamos $\hat{A} = \hat{B}$; neste caso o $\triangle$ será isósceles e teremos $a = b$, o que é absurdo, porque é contrário à hipótese.

Ora, se não é possível $\hat{A} < \hat{B}$ ou $\hat{A} = \hat{B}$, resulta $\hat{A} > \hat{B}$.

Em resumo:

I. *Se os três lados de um △ são iguais, os três ∡ são também iguais, e reciprocamente.*

II. *Se dois lados de um △ são iguais, os ∡ opostos a êstes dois lados são também iguais, e reciprocamente.*

III. *Se os três lados de um △ são diferentes, os três ∡ são também diferentes, e reciprocamente; ao maior lado se opõe o maior ∠ e reciprocamente.*

95. Grandeza relativa dos lados de um triângulo. Os três lados que constituem um △ não podem ser quaisquer; não podem ser três segmentos com comprimentos arbitrários; devem satisfazer às duas condições que constituem o seguinte:

TEOREMA. ***Qualquer lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois, porém maior do que a diferença.*** (fig. 37)

$$\text{H.} \left\{ \text{ABC é um } \triangle \right. \qquad \text{T.} \left\{ \begin{array}{l} AB < AC + BC \\ AB > AC - BC \end{array} \right.$$

Em relação à primeira parte da tese não há nada a demonstrar porque, entre os pontos A e B, o caminho mais curto é o segmento retilíneo AB.

Para demonstrar a segunda parte da tese, tomemos o lado AC (ou BC) e apliquemos a êste lado a primeira propriedade. Teremos $AC < AB + BC \;\therefore\; AC - BC < AB \;\therefore$

$$AB > AC - BC.$$

Portanto, um △ no qual $a = 15$m, $b = 8$m e $c = 5$m, não existe porque a não é menor do que $b + c$ ou porque c não é maior que $a - b$.

96. Linhas envolventes e envolvidas. Uma linha quebrada ou poligonal é convexa quando, prolongando-se qualquer um de seus elementos, toda ela fica situada do mesmo lado dêste elemento prolongado. A linha poligonal ABCD (fig. 38) é convexa porque, prolongando-se o elemento BC ou qualquer outro, toda ela fica situada do mesmo lado dêste elemento prolongado.

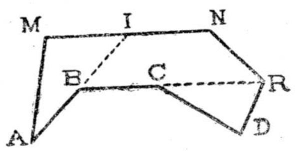


Fig. 38.

Quando duas linhas poligonais ABCD e AMNRD têm extremidades comuns, os pontos A e D, e estão situadas do mesmo lado do segmento retilíneo AD, a linha interior ABCD é chamada *envolvida* e a exterior AMNRD é chamada *envolvente.*

TEOREMA. ***Uma linha poligonal convexa é menor que uma linha poligonal envolvente, convexa ou não, e terminada nas mesmas extremidades.*** (fig. 38)

Com efeito, prolongando os elementos AB e BC, até encontrarem a envolvente nos pontos I e R, teremos:

$$\begin{aligned} AB + BI &< AM + MI \\ BC + CR &< BI + IN + NR \\ CD &< CR + RD \end{aligned}$$

Somando e reduzindo:

$$AB + BC + CD < AM + MI + IN + NR + RD \;\therefore$$
$$AB + BC + CD < AM + MN + NR + RD$$

97. Igualdade de triângulos quaisquer. Os elementos principais de um △ são seis: os três lados e os três ∡. Para que dois ▲ sejam iguais, é necessário que possam coincidir, isto é, os três lados de um devem coincidir com os três lados do outro, e os três ∡ do primeiro devem coincidir com os três ∡ do segundo. Vamos agora estudar três teoremas, chamados geralmente **casos de igualdade de ▲ quaisquer,** pelos quais verificaremos que dois ▲ são iguais quando três elementos do primeiro, convenientemente escolhidos, são iguais aos três elementos correspondentes do segundo. (§ 163)

PRIMEIRO CASO. ***Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual adjacente a dois ângulos iguais, cada um a cada um.***

$$\text{H.} \left\{ \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right. \qquad \text{T.} \left\{ \triangle\, ABC = \triangle\, A'B'C' \right.$$

Façamos o △ A'B'C' (fig. 39) deslizar no plano em que está situado, até que o lado A'B' coincida com o lado AB, o que é possível, devido à hipótese. Sendo $\hat{A} = \hat{A}'$ (hip.) o lado A'C' coincidirá em direção com o lado AC, e o ponto C' coincidirá com um ponto situado

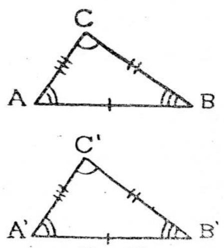


Fig. 39

em AC ou no seu prolongamento. Sendo $\hat{B}=\hat{B}'$ (hip.) o lado B'C' coincidirá, em direção, com o lado BC, e o ponto C' coincidirá com um ponto situado em BC ou no seu prolongamento. Mas, se o ponto C' deve coincidir com um ponto situado em AC e um ponto situado em BC, é claro que êle coincide com o ponto C, que é o único ponto comum aos lados AC e BC. Ora, se os três vértices do △ A'B'C' coincidem com os três vértices do △ ABC, êstes dois △s *coincidem* e são, por consequência, *iguais*. (§163)

Observação. Feita a coincidência dos dois △s, e sendo AB = A'B', vemos que $\hat{C} = \hat{C}'$; sendo $\hat{A} = \hat{A}'$, vemos que BC = B'C'; sendo $\hat{B} = \hat{B}'$, vemos que AC = A'C'. Donde resulta que:

Quando dois △s são iguais, ***a lados iguais se opõem ∡s iguais, e a ∡s iguais se opõem lados iguais.***

Quando dois △s são iguais, é conveniente marcar os elementos iguais, nos dois △s. (fig. 39) Sendo AB = A'B', marcaremos êstes dois lados *com um traço*, e os ∡s opostos a êstes dois lados, isto é, os ∡s C e C', serão então marcados com *um arco*. Os lados BC e B'C' são iguais e estão marcados com *dois traços*; então os ∡s A e A', que se opõem a êstes dois lados, serão marcados *com dois arcos*. E os lados AC e A'C' sendo marcados com *três traços*, os ∡s B e B', que se opõem a êstes dois lados, serão marcados com *três arcos*.

SEGUNDO CASO. ***Dois triângulos são iguais quando têm dois lados iguais, cada um a cada um, e o ângulo formado pelos dois lados do primeiro, é igual ao ângulo formado pelos dois lados do segundo.***

$$\text{H.}\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ \triangle\, ABC = \triangle\, A'B'C'$$

Façamos o △ A'B'C' (fig. 39) deslizar no plano em que está situado, até que o lado A'B' coincida com o lado AB, o que é possível, devido à hipótese. Sendo $A = \hat{A}$ (hip.) o lado A'C' coincide em direção com o lado AC. Mas, AC = A'C' (hip.) e o ponto A' está sôbre o ponto A; assim o ponto C' coincide com o ponto C. Ora, se os três vértices do △ A'B'C' coincidem com os três vértices do △ ABC, êstes dois △s *coincidem* e são, por consequência, iguais. (§ 163)

TERCEIRO CASO. ***Dois triângulos são iguais quando os três lados de um são iguais, cada um a cada um, aos três lados do outro.*** (fig. 40)

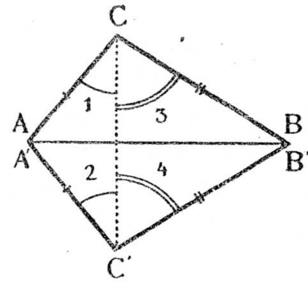


Fig. 40

$$\text{H.}\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \quad \text{T.}\ \{\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

Sendo AB = A'B' (hip.) os dois △s podem ser colocados na posição indicada. (fig. 40)

Tracemos o segmento CC'.

Sendo AC = A'C' (hip.) o △ CAC' é isósceles; logo, $\hat{1} = \hat{2}$.

Sendo BC = B'C' (hip.) o △ CBC' é isósceles; logo, $\hat{3} = \hat{4}$.

Portanto,

$$\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4} \quad \therefore \quad A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$$

Neste caso, os △s ABC e A'B'C' têm:

$$AC = A'C' \qquad BC = B'C' \qquad \hat{C} = \hat{C}'$$

Logo, são iguais de acôrdo com o segundo caso de igualdade de △s quaisquer.

De acôrdo com os três casos de igualdade de △s, para que dois △s sejam iguais é necessário que três elementos de um dêles sejam iguais a três elementos do outro; mas esta condição necessária não é suficiente; os seis elementos que se supõem respectivamente iguais não devem ser todos angulares.

TEOREMA. ***Quando dois triângulos têm dois lados iguais, cada um a cada um, e o ângulo formado pelos dois lados do primeiro não é igual ao ângulo formado pelos dois lados do segundo, então os terceiros lados não são iguais, e ao ângulo maior se opõe o lado maior.*** (fig. 41)

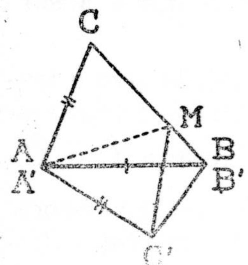


Fig. 41

$$\text{H.}\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} > \hat{A}' \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ BC > B'C'$$

Sendo AB = A'B' (hip.) os dois △s podem ser colocados na posição indicada. (fig. 41)

Tracemos a bissetriz do $\angle$ CAC'. Sendo $C\hat{A}B$ ou $\hat{A} > B'\hat{A}'C'$ ou $\hat{A}'$ (hip.), a bissetriz do $\angle$ CAC', isto é, AM, ficará situada necessàriamente no interior do $\angle$ CAB. E sendo AM a bissetriz do $\angle$ CAC', segue-se que $C\hat{A}M = M\hat{A}C'$. Comparemos os $\triangle$ CAM e MAC'.

$$\left.\begin{array}{l} AC = AC' \text{ (hip.)} \\ AM = AM \\ C\hat{A}M = M\hat{A}C' \end{array}\right| \begin{array}{l} \triangle CAM = \triangle MAC' \text{ (2.º caso)} \therefore \\ CM = MC' \end{array}$$

Sendo o segmento retilíneo BC', a menor distância entre os pontos B e C', teremos:

$$BC' < BM + MC'$$

Porém, MC = MC', como ficou provado. Logo,

$$BC' < BM + MC \therefore BC' < BC$$
$$B'C' < BC \therefore BC > B'C'$$

RECÍPROCA. ***Quando dois triângulos têm dois lados iguais, cada um a cada um, e os terceiros lados desiguais, então os ângulos opostos a êstes terceiros lados são desiguais e o ângulo maior é o que se opõe ao lado maior.***

Para demonstrar esta recíproca é inútil fazer a figura, porque já aprendemos a designar convenientemente os lados e os $\angle$ de um $\triangle$. (§ 93)

$$H. \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c > c' \end{cases} \qquad T. \{ \hat{C} > \hat{C}'$$

Vamos demonstrar esta recíproca pelo método de redução ao absurdo, isto é, negando a tese.

Suponhamos $\hat{C} = \hat{C}'$. Então $\triangle$ ABC = $\triangle$ A'B'C', de acôrdo com o segundo caso de igualdade, donde resulta $c = c'$, o que é absurdo, por ser contrário à hipótese.

Suponhamos $\hat{C} < \hat{C}'$. Teremos $c < c'$, de acôrdo com o teorema direto, o que é também absurdo, por ser contrário à hipótese.

Ora, se não é possível $\hat{C} = \hat{C}'$ ou $\hat{C} < \hat{C}'$, resulta $\hat{C} > \hat{C}'$.

Observação. Recomendamos vivamente aos srs. professores os exercícios da série XLIV do livrinho *Exercícios de Matemática – Terceiro Ano*, ns. 1 a 12.

Êste pequeno esfôrço será largamente recompensado; *os estudantes terão o prazer de demonstrar numerosos teoremas dos capítulos que se vão seguir,* **sem o auxílio do professor ou do compêndio.**

E' indispensável o conhecimento da seguinte

Regra. *Para demonstrar que dois segmentos retilíneos ou dois $\angle$ são iguais, procuram-se dois $\triangle$ dos quais êstes dois segmentos ou $\angle$ façam parte, procura-se demonstrar que os dois $\triangle$ são iguais e marcam-se os elementos iguais.* (§ 97) *Se êstes $\triangle$ não existem, traça-se uma linha de construção, em condições convenientes.*

98. **Igualdade de triângulos retângulos.** A igualdade dos $\triangle$ retângulos é determinada pelos três casos de igualdade de $\triangle$ quaisquer. (§ 97) Entretanto, dois $\triangle$ retângulos, têm sempre um elemento igual que é o $\angle$ reto. Dêste fato resultam, para os $\triangle$ retângulos, dois casos especiais de igualdade.

PRIMEIRO CASO. ***Dois triângulos retângulos são iguais quando têm a hipotenusa igual e um cateto igual.***

$$H. \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' = 1 \text{ reto} \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \qquad T. \{ \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

Sendo AC = A'C' (hip.) os dois $\triangle$ podem ser colocados na posição indicada. (fig. 42) Temos AC = A'C' e BC = B'C' (hip.). Os $\angle$ A e A' sendo retos, são supls.; estando na posição de adjacentes, seus lados exteriores, AB e A'B', estão em linha reta. Mas, as oblíquas BC e B'C' sendo iguais, (hip.) seus pés B e B' distam igualmente do pé da $\perp$ AB; logo, AB = A'B' (§ 89, 2.ª recíproca). Donde resulta que $\triangle$ ABC = $\triangle$ A'B'C'. (§ 97, 3.º caso)

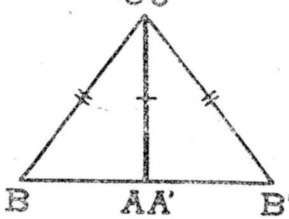


Fig. 42

SEGUNDO CASO. ***Dois triângulos retângulos são iguais quando têm a hipotenusa igual e um ângulo agudo igual.***

$$H. \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' = 1 \text{ reto} \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \qquad T. \{ \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

Façamos o $\triangle$ A'B'C' (fig. 43) deslizar no plano em que está situado, até que a hipotenusa B'C' coincida com a hipotenusa BC, o que é possível, devido à hipótese. Sendo $\hat{C} = \hat{C}'$, o cateto C'A' coincidirá, em direção, com o cateto CA, *e o ponto A' deverá coincidir com um ponto qualquer situado em CA, ou no seu prolongamento.*

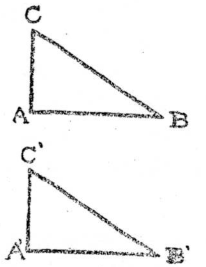


Fig. 43

Ora, sendo BA e B'A', $\perp$s, respectivamente, a AC e A'C', e estando o ponto B sobre o ponto B', as $\perp$s BA e B'A' coincidem em direção. (§89, teorema fundamental) Logo, *o ponto A' deverá coincidir com um ponto situado em* BA, *ou no seu prolongamento.* Então, o ponto A' coincide com o ponto A $\therefore$ $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. (§ 163)

99. **A bissetriz e suas propriedades.** TEOREMA. ***Qualquer ponto situado na bissetriz de um ângulo, dista igualmente dos lados dêste ângulo.***

Seja o $\angle$ MON (fig. 44) e tracemos a sua bissetriz OS. (§87) Tomemos um ponto qualquer A, situado na bissetriz e tracemos as $\perp$s AB e AC.

$$\text{H.} \begin{cases} \hat{1} = \hat{2} \\ AB \perp OM \\ AC \perp ON \end{cases} \qquad \text{T.} \{ AB = AC$$

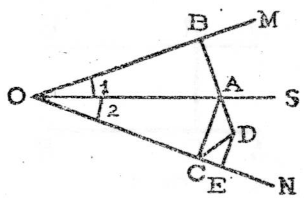


Fig. 44

Comparemos os $\triangle$s AOB e AOC. O $\angle$ ABO é reto porque AB $\perp$ OM, e o $\angle$ ACO também é reto porque AC $\perp$ ON; logo, os $\triangle$s AOB e AOC são retângulos. Mas êles têm a hipotenusa igual e um ângulo agudo igual, a saber $\hat{1} = \hat{2}$. Nestas condições $\triangle$ ABO $=$ $\triangle$ ACO. (§98, 2.° caso) E lembrando que em $\triangle$s iguais, a $\angle$s iguais se opõem lados iguais, conclue-se que os lados AB e AC, que se opõem aos $\angle$s iguais 1 e 2, são iguais. Ora, AB e AC representam as distâncias do ponto A às semirretas OM e ON (§89); portanto, qualquer ponto da bissetriz de um $\angle$ dista igualmente dos lados dêste mesmo $\angle$.

TEOREMA RECÍPROCO. ***Qualquer ponto eqüidistante dos lados de um ângulo está situado na bissetriz dêste ângulo.***

Seja o $\angle$ MON (fig. 54) e suponhamos um ponto A, eqüidistante dos lados dêste mesmo $\angle$. As distâncias do ponto A aos lados do $\angle$ MON são os segmentos AB e AC, respectivamente $\perp$s aos lados OM e ON. E êstes dois segmentos são, por hipótese, iguais.

$$\text{H.} \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp OM \\ AC \perp ON \end{cases} \qquad \text{T.} \begin{cases} \text{O ponto A está} \\ \text{na bissetriz do} \\ \angle \text{ MON.} \end{cases}$$

Liguemos o ponto A ao vértice do $\angle$ MON e comparemos os $\triangle$s AOB e AOC; são retângulos (hip.); têm a hipotenusa igual AO, e um cateto igual, isto é, AB=AC. Logo, $\triangle$ AOB $=$ $\triangle$ AOC. (§98, 1.° caso) Ora, em $\triangle$s iguais, a lados iguais se opõem $\angle$s iguais; os $\angle$s 1 e 2, que se opõem aos lados iguais AB e AC, são iguais. Sendo $\hat{1} = \hat{2}$, a semirreta OA ou OS é realmente a bissetriz do $\angle$ MON.

TEOREMA CONTRÁRIO. ***Um ponto que não está situado na bissetriz de um ângulo, não é eqüidistante dos lados dêste ângulo.***

Seja D (fig. 44) um ponto que não está situado na bissetriz OS do $\angle$ MON. Tracemos os segmentos DE e DB, respectivamente $\perp$s aos lados do $\angle$ MON. Então êstes dois segmentos representam as distâncias do ponto D, aos lados do $\angle$ MON.

$$\text{H.} \begin{cases} \text{O ponto D não está na} \\ \text{bissetriz do } \angle \text{ MON.} \\ \hat{1} = \hat{2} \\ DB \perp OM, \quad DE \perp ON. \end{cases} \qquad \text{T.} \{ DB > DE$$

Se o ponto D não está na bissetriz do $\angle$ MON, uma das $\perp$s, DB, corta necessàriamente a bissetriz OS, num certo ponto A. Tracemos AC $\perp$ ON e liguemos o ponto C ao ponto D.

Sendo DE $\perp$ ON, então DC é oblíqua a ON. Donde

$$DE < DC \qquad \text{(I)}$$

Do $\triangle$ ADC deduzimos que

$$DC < AC + AD \qquad \text{(II)}$$

Combinando as desigualdades I e II, teremos:

$$DE < DC < AC + AD \qquad \text{(III)}$$

Porém AC = AB, porque o ponto A está na bissetriz do ∠ MON. Logo, substituindo AC por AB na desigualdade III,

$$DE < DC < AB + AD \quad \therefore$$
$$DE < DC < DB \quad \therefore$$
$$DE < DB$$

100. A bissetriz é um lugar geométrico. Ficou demonstrado que um ponto qualquer A, (fig. 44) situado na bissetriz OS, dista igualmente dos lados do ∠ MON, e recìprocamente, um ponto A, eqüidistante, dos lados do ∠ MON, está situado na bissetriz dêste mesmo ∠. Ficou também provado que um ponto não situado na bissetriz do ∠ MON, não é eqüidistante dos lados do mesmo ∠. Portanto, todos os pontos da bissetriz do ∠ MON gozam de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence, absolutamente, aos pontos situados fora da bissetriz. Logo, a bissetriz de um ∠ *é um lugar geométrico; é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos lados de um ∠.*

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos lados de um ângulo é a bissetriz dêste mesmo ângulo.

Quando, na resolução de um problema qualquer de Geometria, necessitarmos de um ponto eqüidistante dos lados de um ∠, não devemos hesitar; tracemos imediatamente a bissetriz dêste ∠, porque é nela, e sòmente nela, que existem pontos eqüidistantes dos lados dêste mesmo ∠.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIV.

101. Definição de paralelas. *Duas retas são paralelas quando, sendo complanares,* (*) *não têm nenhum posto comum.* As retas AB e CD (fig. 45) são complanares: supondo que não tenham nenhum ponto comum, embora prolongadas indefinida-

(*) E. M. P. V. §26.

mente, serão ∥. Da definição de retas ∥ resulta que duas retas ∥ não têm nenhum ponto comum; mas esta condição não é suficiente; a definição exige também que as duas retas **sejam complanares.** Em uma sala de aula é fácil apontar duas retas que, embora indefinidamente prolongadas, não se encontram, isto é, não têm nenhum ponto comum; uma das quinas da mesa do professor e a intersecção de duas paredes; entretanto, não são ∥ porque não estão situadas no mesmo plano; **não são complanares.**

Às vêzes, será necessário dizer que duas ∥ se encontram no infinito, têm um ponto comum situado no infinito. Entretanto, isto não irá de encontro à definição de retas ∥, porque êste ponto fica tão distante...

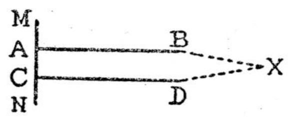


Fig 45

102. Teoremas relativos às paralelas. ***Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.***

Sejam as retas AB e CD (fig. 45) ⊥s à reta MN. Se não fossem ∥ elas se encontrariam em um certo ponto X e, por êste ponto X, teríamos duas retas ABX e CDX, ⊥s a uma mesma reta MN, o que não pode ser. (§89) Logo...

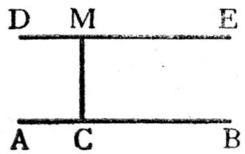


Fig. 46

COROLÁRIO. ***Por um ponto dado e situado fora de uma reta dada é sempre possível traçar uma paralela à reta dada.***

Seja AB a reta dada e M o ponto dado. (fig. 46) Pelo ponto M traça-se MC ⊥ AB, e pelo ponto M traça-se DE ⊥ MC. As retas DE e AB, sendo ⊥s à mesma reta MC, são ∥.

Postulado de Euclides. *Por um ponto dado e situado fora de uma reta dada, podemos traçar sòmente uma ∥ à reta dada.*

Vimos que, pelo ponto M, é sempre possível traçar uma ∥ à reta AB. Entretanto, não é possível traçar pelo ponto M uma segunda reta que seja também ∥ à mesma reta AB. Esta última verdade da Geometria, Euclides não conseguiu demonstrá-la e então pediu aos seus contemporâneos que a aceitassem como evidente e, portanto, sem demonstração.

Observação. *Postulatum*, do latim *postulare*, isto é, *pedir*. Euclides foi um geómetra grego que viveu em Alexandria no século III antes da era cristã. Os contemporâneos de Euclides quiseram demonstrar o célebre postulado e não o conseguiram; os nossos contemporâneos demonstraram a sua indemonstrabilidade.

O que nós enunciamos hoje como *postulado de Euclides*, não é exatamente *o que Euclides pediu*; veremos adiante a verdadeira forma dêste postulado.

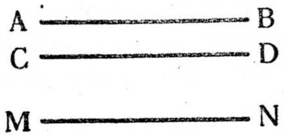


Fig. 47

Do postulado de Euclides resultam três corolários.

Primeiro corolário. *Duas retas ∥ a uma terceira são ∥.*

Suponhamos AB ∥ MN e CD ∥ MN. (fig. 47) Vamos provar que as retas AB e CD são ∥. Com efeito, se não fossem ∥, elas se encontrariam em um ponto X, e então, pelo ponto X, teríamos duas retas, ABX e CDX, ∥ a uma mesma reta MN, o que não pode ser porque é contrário ao postulado de Euclides. Logo...

Segundo corolário. *Quando duas retas são ∥, qualquer reta que corta a primeira, corta também a segunda.*

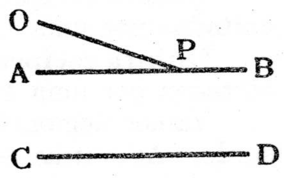


Fig. 48

Suponhamos AB ∥ CD (fig. 48) e seja OP uma reta que corta AB no ponto P. Vamos provar que a reta OP corta também a reta CD. Com efeito, se OP não cortasse CD, se OP fosse ∥ à CD, teríamos então, pelo ponto P, duas retas AB e OP, ∥ a uma mesma reta CD, o que não pode ser porque é contrário ao postulado de Euclides. Logo...

Terceiro corolário. *Quando duas retas são ∥, toda ⊥ a uma, é também ⊥ à outra.*

Suponhamos CD ∥ AB, e MP ⊥ CD. Vamos provar que MP ⊥ AB. Negando a tese, admitamos que AB não é ⊥ MP;

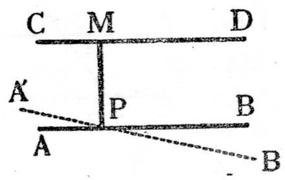


Fig. 49

então, pelo ponto P, tracemos A'B' ⊥ MP. Duas ⊥s a uma mesma reta são ∥; logo, CD ∥ A'B'.

Mas, CD ∥ AB (hip.). Logo, pelo ponto P temos duas retas distintas, AB e A'B', ambas ∥ a uma mesma reta, CD,

o que não pode ser. (postulado de Euclides) Donde resulta que A'B' coincide com AB, isto é, AB ⊥ MP.

103. Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal. *Chama-se transversal ou secante* (do latim *secare*, cortar) *a reta que corta uma figura geométrica qualquer.* Quando duas retas quaisquer AB e CD (fig. 50) são cortadas por uma secante MN, formam-se oito ∡ que têm denominações particulares.

Os ∡ *a*, *b*. *c*, *d*, são chamados *internos*, em relação às duas retas AB e CD cortadas pela transversal MN; os ∡ *g*, *e*. *f*, *h*, são chamados *externos*. Os ∡ *a*, *d*, *g*, *f*, estão situados de *um lado* da transversal, ao passo que os ∡ *b*, *c*, *e*, *h*. estão situados *do outro lado* da mesma transversal.

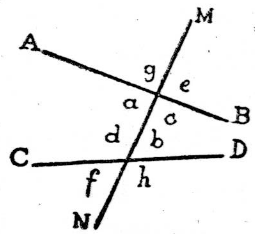


Fig. 50

Ângulos alternos-internos *são os ∡ internos, situados de um lado e do outro da transversal, e não adjacentes.* Os ∡ *a* e *b* são alternos-internos, assim como os ∡ *c* e *d*.

Ângulos alternos-externos *são os ∡ externos, situados de um lado e do outro da transversal, e não adjacentes.* Os ∡ *e* e *f* são alternos-externos, assim como os ∡ *g* e *h*.

Ângulos correspondentes *são os ∡ situados do mesmo lado da transversal, um interno e outro externo, e não adjacentes.* Os ∡ *a* e *f* são correspondentes, assim como os ∡ *c* e *h*, *d* e *g*, *b* e *e*.

Ângulos colaterais-internos, *são os ∡ internos situados do mesmo lado da transversal.* Os ∡ *a* e *d* são colaterais-internos, assim como os ∡ *b* e *c*.

Ângulos colaterais-externos *são os ∡ externos situados do mesmo lado da transversal.* Os ∡ *e* e *h* são colaterais-externos, assim como os ∡ *f* e *g*.

Os oito ∡ formados pelas retas AB e CD, quando cortadas pela transversal MN, em geral não são ∡ retos; são agudos ou obtusos, sendo *quatro agudos* e *quatro obtusos*. Se o ∠ *a* é agudo, seus suplementos, os ∡ *c* e *g*, são obtusos; e o ∠ *e* sendo

igual ao $\angle a$, por serem o. p. v. é também agudo. O mesmo acontece com os ∡ b, d, f, h.

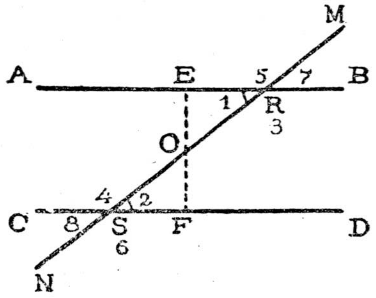


Fig. 51

TEOREMA. ***Quando duas paralelas são cortadas por uma transversal, os quatro ângulos agudos são iguais, assim como os quatro ângulos obtusos.***

Sejam AB e CD as duas ∥ e MN a transversal. Pelo ponto O, centro do segmento RS, tracemos o segmento EF ⊥ AB. O segmento EF será também ⊥ CD. (terceiro corolário do postulado de Euclides) Comparemos os △ ROE e SOF. São △ retângulos porque EF é ⊥ às ∥ AB e CD; suas hipotenusas, OR e OS, são iguais por construção; $R\hat{O}E = S\hat{O}F$. (o. p. v.) Logo, △ ROE = △ SOF. (§101, 2.º caso) Donde resulta que $\hat{1} = \hat{2}$. Porém $\hat{1}=\hat{7}$ e $\hat{2}=\hat{8}$. (o. p. v.) Então, $\hat{1}=\hat{2}=\hat{7}=\hat{8}$. E êstes quatro ∡ sendo iguais, os seus suplementos, isto é, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{6}$, são também iguais.

COROLÁRIO. ***Quando duas paralelas são cortadas por uma transversal,***

I. Os ângulos alternos-internos são iguais.
II. Os ângulos alternos-externos são iguais.
III. Os ângulos correspondentes são iguais.
IV. Os ângulos colaterais-internos são suplementares.
V. Os ângulos colaterais-externos são suplementares.

Já vimos que $\hat{1}=\hat{2}$ e $\hat{3}=\hat{4}$; portanto o número I está demonstrado. Vimos também que $\hat{5}=\hat{6}$ e $\hat{7}=\hat{8}$; logo o número II está também demonstrado. Vimos ainda que $\hat{1}=\hat{8}$, $\hat{3}=\hat{6}$, $\hat{2}=\hat{7}$ e $\hat{4}=\hat{5}$; o número III também está demonstrado. Resta-nos demonstrar os números IV e V.

Os ∡ 1 e 3 são supls. (§86), isto é, $\hat{1}+\hat{3}=2$ retos. Nesta igualdade podemos substituir $\hat{3}$ por $\hat{4}$, porque são iguais. Logo,

$\hat{1}+\hat{4}=2$ retos, isto é, êstes dois ∡ col.-int. são supls. De modo análogo provaríamos que os ∡ col.-int. 3 e 2 são também supls.

Os ∡ 5 e 7 são supls. (§86), isto é, $\hat{5}+\hat{7}=2$ retos. Nesta igualdade podemos substituir $\hat{5}$ por $\hat{6}$, porque são iguais. Logo, $\hat{6}+\hat{7}=2$ retos, isto é, êstes dois ∡ col.-ext. são supls. De modo análogo provaríamos que os ∡ col.-ext. 5 e 8 são supls.

O teorema que acabámos de demonstrar e seu corolário nos conduziram a cinco conclusões distintas. Por conseqüência, temos de demonstrar agora cinco recíprocas.

Primeira recíproca. Se os ∡ alt.-int. formados por duas retas cortadas por uma transversal *são iguais, estas duas retas são* ∥.

Segunda recíproca. Se os ∡ alt.-ext. formados por duas retas cortadas por uma transversal *são iguais, estas duas retas são* ∥.

Terceira recíproca. Se os ∡ correspondentes formados por duas retas cortadas por uma transversal *são iguais, estas duas retas são* ∥.

Quarta recíproca. Se os ∡ col. int. formados por duas retas cortadas por uma transversal, *são supls. estas duas retas são* ∥.

Quinta recíproca. Se os ∡ col.-ext. formados por duas retas cortadas por uma transversal, *são supls. estas duas retas são* ∥.

Vamos demonstrar a primeira recíproca pela redução ao absurdo. As outras se demonstrarão de modo análogo.

$$\text{H.} \left\{ \hat{1} = \hat{2} \right. \qquad \text{T.} \left\{ AB \parallel CD \right.$$

Admitamos, negando a tese, que AB não é ∥ CD. (fig. 52) Pelo ponto S tracemos C'D' ∥ AB. Se estas duas retas são ∥, teremos $\hat{1}=\hat{3}$, porque são dois ∡ alt.-int., formados pelas ∥ AB e C'D', cortadas pela transversal MN. (O $\angle$ 3 é o $\angle$ RSD'.) De acôrdo com a hipótese, $\hat{1} = \hat{2}$. Ora, sendo $\hat{1}=\hat{3}$ e $\hat{1}=\hat{2}$, resulta que $\hat{2}=\hat{3}$. Mas esta igualdade é um absurdo. Se a negação da tese nos conduziu a um absurdo, e se não há outra maneira de negá-la, forçoso é admitir que AB ∥ CD.

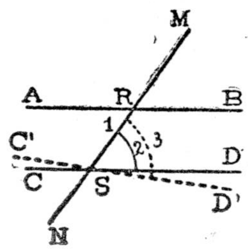


Fig. 52

104. O verdadeiro postulado de Euclides. Consideremos as retas AB e CD, cortadas pela transversal MN. (fig. 50) Se as retas AB e CD não são ∥, elas se encontram. Onde? De que lado da transversal? E' Euclides quem responde no seu famoso *Postulatum.*

Axioma n.º 11 dos "Elementos" de Euclides. ***Quando duas retas são cortadas por uma transversal, estas duas retas se encontram sempre do lado em que a soma dos ângulos colaterais-internos é menor do que dois ângulos retos.***

Se êstes dois ∡ forem suplementares, os outros dois colaterais-internos, situados do outro lado da transversal, também serão suplementares e, neste caso, onde se encontrarão as retas AB e CD, que são duas retas distintas? Ou não se encontram, ou deverão encontrar-se em dois pontos X e Y, situados respectivamente de um lado e do outro da transversal MN, e a uma distância infinitamente grande desta transversal. Então as retas AB e CD, sendo complanares e encontrando-se no infinito, são ∥.

105. Porções de paralelas entre paralelas. Sejam duas ∥ AB e CD, cortadas por outras duas ∥ AC e BD. (fig. 53)

TEOREMA. ***Porções de paralelas entre paralelas são iguais.***

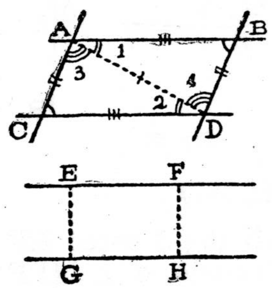


Fig. 53

$$\text{H.} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{cases} \qquad \text{T.} \begin{cases} AB = CD \\ AC = BD \end{cases}$$

Tracemos o segmento AD e comparemos os ⊿ ABD e ACD.

$$AD = AD$$

$\hat{1} = \hat{2}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AB e CD, etc..)

$\hat{3} = \hat{4}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AC e BD, etc..)

$\triangle ABD = \triangle ACD$ (1.º caso de igualdade de ⊿ quaisquer)

Completando a marcação teremos AB=CD e AC=BD.

COROLÁRIO. ***Duas paralelas são eqüidistantes.***

Consideremos as ∥ EF e GH. (fig. 53) Se, por um ponto qualquer E, da primeira, traçarmos o segmento EG ⊥ à segunda, êste segmento EG será a distância do ponto E à reta GH, ou do ponto G à reta EF. Anàlogamente o segmento FH, sendo

⊥ à GH, e, portanto, à EF (3.º corolário do postulado de Euclides) será a distância do ponto F à reta GH, ou do ponto H à reta EF. (§ 89, 1.º teorema) Ora:

Distância de duas paralelas *é o comprimento do segmento ⊥ às duas, e por elas limitado.* Mas, duas ⊥s a uma mesma reta são ∥. (§ 101) Então EG e FH, sendo ⊥s à GH, são ∥. Mas, porções de ∥ entre ∥ são iguais. Logo, EG=FH, isto é, duas ∥ são eqüidistantes.

106. Mais um lugar geométrico. Vamos resolver mais um problema de Geometria: dada uma reta AB, (fig. 54) determinar um ponto situado a 5cm de AB. Por um ponto qualquer C, tracemos CX ⊥ AB. Em seguida, marquemos em CX dois segmentos, CD e CD′ com 5cm, e pelos pontos D e D′ tracemos MN e M′N′ ∥ AB. Desde que duas ∥ são eqüidistantes, qualquer ponto da reta MN ou M′N′ dista 5cm da reta AB, e é, portanto, uma solução do problema proposto. *E fora das retas MN e M′N′, ∥ à reta AB, não existem pontos cuja distância à reta AB seja igual a 5cm.* Com efeito, sendo, com evidência, CE > CD, a distância do ponto E à reta AB é superior a 5cm; sendo, com evidência, CE′ < CD, a distância do ponto E′ à reta AB é inferior a 5cm.

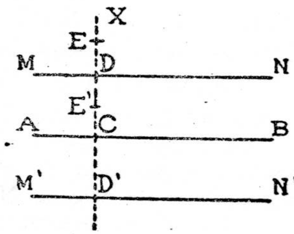


Fig. 54

Ora, desde que qualquer ponto situado nas retas MN e M′N′ ∥ AB, dista 5cm de AB, e desde que fora das retas MN e M′N′ não existem pontos situados a 5cm de AB, conclue-se que estas duas retas MN e M′N′ constituem *um lugar geométrico.*

O lugar geométrico dos pontos de um plano, situados a uma distância dada, de uma reta dada neste mesmo plano, é constituído por duas paralelas à reta dada.

Exercícios em classe

1. Dada uma reta AB e dois pontos P e Q situados fora da reta AB, determinar um ponto eqüidistante dos pontos P e Q, e situado a 2cm da reta AB.
2. Traçar um ∠ MON com 45º e uma reta qualquer AB. Determinar um ponto situado a 2cm da reta AB, e eqüidistante dos lados do ∠ MON.

3. Determinar um ponto situado a 3cm de duas retas AB e CD que se cortam.

107. Ângulos cujos lados são paralelos. Consideremos os ∡ ABC e MON, cujos lados são ‖, isto é, AB ‖ MO e BC ‖ NO. (fig. 55)

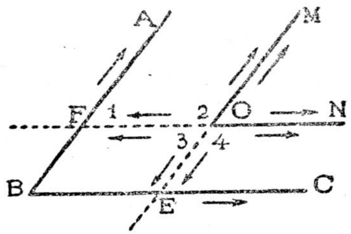


Fig. 55

TEOREMA. ***Dois ângulos cujos lados são paralelos, são iguais ou suplementares.***

Prolonguemos as semirretas OM e ON até encontrarem as semirretas BA e BC, respectivamente nos pontos F e E. Teremos: $\hat{B}=\hat{1}$ (correspondentes formados pelas ‖ BC e FN, cortadas pela transversal AB); $\hat{O}=\hat{1}$ (correspondentes formados pelas ‖ AB e EM cortadas pela transversal FN). De $\hat{B}=\hat{1}$ e $\hat{O}=\hat{1}$ deduzimos $\hat{B}=\hat{O}$. Portanto, êstes dois ∡, tendo seus lados ‖, são iguais. E observe-se que as semirretas ‖ BA e OM estão dirigidas no mesmo sentido, assim como as semirretas ‖ BC e ON.

Observação. Sentido de uma semirreta é o sentido do movimento de um ponto que, partindo da origem da semirreta, percorre esta mesma semirreta, afastando-se da origem. Nós indicamos o sentido de uma semirreta com uma seta. (fig. 55) As semirretas ‖ BC e ON são do mesmo sentido; as semirretas ‖ BC e OF são de sentidos contrários.

Entretanto, os ∡ B e 2 também têm seus lados ‖. Provámos que $\hat{B}=\hat{O}$. Já sabemos que $\hat{2}+\hat{O}=2$ *retos.* (§ 86) Logo, $\hat{2}+\hat{B}=2$ *retos*, isto é, os ∡ B e 2, tendo seus lados ‖, são supls. E observe-se que as semirretas ‖ BA e OM estão dirigidas no mesmo sentido, ao passo que as semirretas ‖ BC e OF estão dirigidas em sentidos contrários.

Os ∡ B e 3 também têm seus lados ‖. Já vimos que $\hat{B}=\hat{O}$. E sendo $\hat{3}=\hat{O}$ (o. p. v.) segue-se que $\hat{B}=\hat{3}$, isto é, os ∡ B e 3, tendo seus lados ‖, são iguais. E observe-se que as semirretas ‖ BA e OE, estão dirigidas em sentidos contrários, assim como as semirretas ‖ BC e OF.

Finalmente, os ∡ B e 4 também têm seus lados ‖. Já vimos que $\hat{B}=\hat{O}$. E sendo $\hat{4}$ suplemento de $\hat{O}$, $\hat{4}$ será também su-

plemento de $\hat{B}$, isto é, os ∡ B e 4, tendo seus lados ‖, são supls. E observe-se que as semirretas ‖ BC e ON estão dirigidas no mesmo sentido, ao passo que as semirretas ‖ BA e OE estão dirigidas em sentidos contrários.

Em resumo, quando dois ∡ têm seus lados ‖, são iguais ou supls. São iguais quando os lados ‖ se dirigem no mesmo sentido ou em sentidos contrários; é o que se dá com os ∡ B e O ou B e 3. São supls. quando dois lados ‖ se dirigem no mesmo sentido, ao passo que os outros dois se dirigem em sentidos contrários; é o que se dá com os ∡ B e 2, ou B e 4.

Exercícios. Repetir esta demonstração considerando cada caso separadamente e fazendo a figura de acôrdo com o caso que se quer demonstrar.

108. Ângulos cujos lados são perpendiculares. Consideremos os ∡ 1 e 2 cujos lados são ⊥s, isto é, AB ⊥ EF e BC ⊥ DE. (fig. 56)

TEOREMA. ***Dois ângulos cujos lados são perpendiculares, são iguais ou suplementares.***

$$\text{H.} \begin{cases} AB \perp EF \\ BC \perp ED \end{cases}$$

$$\text{T.} \begin{cases} \hat{1} = \hat{2} \text{ ou} \\ \hat{1} + \hat{2} = 2 \text{ retos.} \end{cases}$$

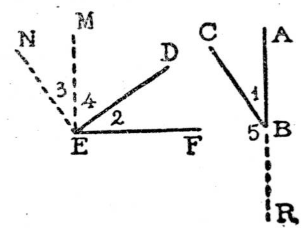


Fig. 56

Pelo vértice E do ∠ DEF, tracemos as semirretas EN e EM, respectivamente ‖ às semirretas BC e BA, e dirigidas no mesmo sentido. Então, $\hat{1} = \hat{3}$. (§ 107)

Sendo EM ‖ AB (construção) e EF ⊥ AB (hip.) então EF ⊥ EM. (Postulado de Euclides, 3.º corolário) Assim sendo, o ∠ MEF é um ∠ reto ou $\hat{4}+\hat{2}=1$ reto.

Sendo EN ‖ BC (construção) e ED ⊥ BC (hip.) então ED ⊥ EN. (Postulado de Euclides, 3.º corolário) Assim sendo, o ∠ NED é um ∠ reto ou $\hat{4}+\hat{3}=1$ reto.

Sendo $\hat{2}$ complemento de $\hat{4}$, e $\hat{3}$ também complemento de $\hat{4}$, segue-se $\hat{2}=\hat{3}$. Mas $\hat{3}=\hat{1}$. (construção) Logo, $\hat{1}=\hat{2}$.

Portanto, dois ∡ cujos lados são ⊥s, são iguais. Mas, $\hat{5}$ também tem seus lados ⊥s aos lados de $\hat{2}$. E sendo $\hat{1}=\hat{2}$, e os ∡ 1 e 5 sendo supls., conclue-se que o $\angle$ 5 é suplemento do $\angle$ 2. Nestas condições, dois ∡ cujos lados são ⊥s, são iguais ou supls.?

E' fácil distinguir. Se ambos são agudos não podem, evidentemente, ser supls.; então são iguais. O mesmo sucede quando ambos são obtusos; são também iguais. Entretanto, se um é agudo e o outro é obtuso, os dois são supls.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLV.

109. **Soma dos ângulos de um triângulo.** TEOREMA. ***A soma dos três ângulos de um triângulo retilíneo é sempre igual a dois ângulos retos.***

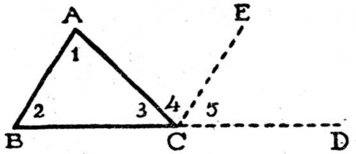


Fig. 57

H. { ABC é um △.

T. { $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2$ retos.

Seja ABC (fig. 67) um △ qualquer. Prolonguemos BC formando assim o $\angle$ externo ACD. Pelo ponto C tracemos CE ‖ BA; fica assim o $\angle$ ACD dividido em dois ∡, 4 e 5, em geral desiguais.

Já sabemos que $\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}=2$ retos (§86, 1.° corolário) Mas,

$\hat{4}=\hat{1}$ (alt.-int. formados pelas ‖ AB e CE cortadas, etc..)

$\hat{5}=\hat{2}$ (correspondentes formados pelas ‖ AB e CE, etc..)

Substituindo na primeira igualdade, teremos:

$$\hat{3}+\hat{1}+\hat{2}=2 \text{ retos} \quad \therefore \quad \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2 \text{ retos}$$

Dêste teorema resultam numerosos corolários.

I. Dados dois △, ABC e A'B'C', se $\hat{A}=\hat{A}'$ e $\hat{B}=\hat{B}'$, então $\hat{C}=\hat{C}'$, isto é, *quando dois △ têm dois ∡ iguais, cada um a cada um, os terceiros ∡ são também iguais.*

Graças a êste corolário, diremos daquí por diante que *dois △ são iguais quando têm um lado igual e dois ∡ quaisquer iguais, cada um a cada um.* (§ 97, 1.° caso) Porque então os terceiros ∡ serão iguais e estarão preenchidas as condições exigidas pelo primeiro caso de igualdade de △.

II. *O $\angle$ externo de um △ é igual à soma dos dois ∡ internos não adjacentes.* Com efeito, sendo $\hat{4}=\hat{1}$ e $\hat{5}=\hat{2}$, conclue-se que $\hat{4}+\hat{5}=\hat{1}+\hat{2}$ $\therefore$ $A\hat{C}D=\hat{1}+\hat{2}$. (fig. 57)

III. *O $\angle$ externo de um △ é maior do que qualquer um dos ∡ internos não adjacentes.* Com efeito, sendo $A\hat{C}D=\hat{1}+\hat{2}$, segue-se que $A\hat{C}D > \hat{1}$ ou $A\hat{C}D > \hat{2}$. (fig. 57)

IV. *Duas ‖ encontrando-se no infinito formam um $\angle$ nulo.* Sejam as ‖ AB e CD (fig. 45, §101) que se encontram em um ponto X situado no infinito (a uma distância infinita) formando o △ ACX. Sendo NCX um $\angle$ externo ao △ ACX, teremos:

$$N\hat{C}X = C\hat{A}X + \hat{X}$$

Mas, a soma $N\hat{C}X$ é igual a uma das parcelas $C\hat{A}X$. (São dois ∡ correspondentes formados pelas ‖ AX e CX, cortadas pela transversal MN.) Então, a outra parcela é nula, isto é, o $\angle$ X é nulo.

V. *Se um $\angle$ de um △ é obtuso, os outros dois são agudos.* Com efeito, se um dos ∡ é maior do que um $\angle$ reto, a soma dos outros dois é menor do que um $\angle$ reto e, então, êles são agudos. Ao △ que tem um $\angle$ obtuso dá-se o nome de **triângulo obtusângulo.**

VI. *Se um $\angle$ de um △ é reto, os outros dois são agudos e são compls.* Desde que um dos ∡ é reto, a soma dos outros dois é igual a um $\angle$ reto; portanto, êles são agudos e compls. Êste △ é o **triângulo retângulo.**

VII. *Os três ∡ de um △ podem ser agudos.* Dá-se a êste △ o nome de **triângulo acutângulo.**

Os triângulos obtusângulos e acutângulos são chamados **triângulos obliquângulos.**

VIII. *Em um △ equilátero cada $\angle$ vale dois terços de um $\angle$ reto.* (60° ou 66,6666 grados)

Exercício teórico. Dado um △ ABC (fig. 57), prolongam-se os três lados nas seguintes condições: o lado AB, de A para B; o lado BC, de B para C; o lado CA, de C para A. Formam-se assim três ∡ externos. Provar que a soma dêstes três ∡ é igual a quatro ∡ retos.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLVI.

110. Os quadriláteros. *Quadrilátero é o polígono de quatro lados.* (§ 95)

Em um quadrilátero qualquer ABCD, dois lados que se encontram em um mesmo vértice, são chamados *consecutivos ;* no caso contrário são chamados *opostos.* Os lados AB e AD ou BA e BC ou CB e CD ou DC e DA são consecutivos ; os lados AB e CD são opostos, assim como os lados AD e BC. Analogamente, os vértices A e B, situados nas extremidades de um mesmo lado são vértices consecutivos ; ao passo que os vértices A e C, não situados nas extremidades de um mesmo lado, são vértices opostos.

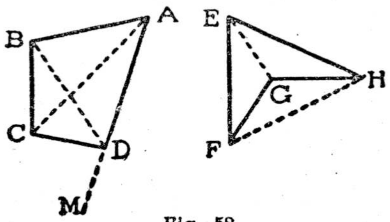


Fig. 58

Também os ∡ são consecutivos ou opostos ; os ∡ A e B são consecutivos, ao passo que os ∡ A e C são opostos.

Um quadrilátero (ou um polígono qualquer, excetuando o triângulo), pode ser *convexo* ou *côncavo.* E' *convexo* quando, prolongando-se indefinidamente qualquer um de seus lados, nos dois sentidos, o quadrilátero fica situado de um mesmo lado dêste lado prolongado ; o quadrilátero ABCD é *convexo.* (fig. 58) E' *côncavo* quando, prolongando-se indefinidamente qualquer um dos seus lados, nos dois sentidos, o quadrilátero fica situado dos dois lados dêste lado prolongado ; o quadrilátero EFGH é *côncavo.* Uma secante corta um quadrilátero convexo sòmente em dois pontos.

Um quadrilátero (ou um polígono qualquer, excetuando o triângulo) pode ser *plano* ou *reverso.* E' plano quando todos os vértices estão situados no mesmo plano ; é *reverso* no caso contrário. O quadrilátero ABCD é um quadrilátero plano. (fig. 58) Para compreender em que consiste um quadrilátero reverso, desenhemos o quadrilátero ABCD, recortemos a figura, tracemos a diagonal BD e, em seguida, coloquemos o quadrilátero sôbre o plano do quadro-negro, de modo que o △ BCD coincida inteiramente com o plano. Se não deixarmos o vértice A pousar no quadro negro, teremos diante dos olhos a imagem de um quadrilátero reverso.

O triângulo é sempre plano e convexo.

Observação. Nestas lições elementares de Geometria plana estudaremos sòmente polígonos convexos e planos.

111. Soma dos ângulos de um quadrilátero. ***E' igual a quatro ∡ retos,*** como é fácil demonstrar. Em um quadrilátero qualquer ABCD (fig. 58) traça-se uma diagonal BD ; o quadrilátero fica decomposto em dois ▲, ABD e CBD. A soma dos três ∡ de um △ é igual a dois ∡ retos (§ 112); portanto, a soma dos ∡ dos ▲ ABD e CBD é igual a quatro ∡ retos. Mas os ∡ dos ▲ ABD e CBD são, evidentemente, os ∡ do quadrilátero ; logo...

112. O paralelogramo. Devido à natureza de seus elementos principais, isto é, lados e ∡, os quadriláteros têm denominações especiais : paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, trapézio e quadrilátero qualquer.

Paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Esta afirmação não é um *teorema,* não é uma verdade que exige demonstração *é uma definição.* A fig. ABCD (fig. 59) é um quadrilátero no qual os lados opostos são ∥ ; por êste fato recebe o nome especial de ***paralelogramo.*** Se um quadrilátero dado é um ▱, nós podemos afirmar que seus lados opostos são ∥ ; para provar que um quadrilátero é um ▱, deveremos provar que seus lados opostos são ∥.

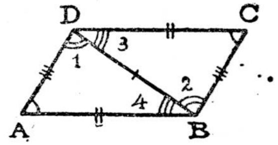


Fig. 59

TEOREMA. ***Em um paralelogramo, os lados opostos são iguais, e ângulos opostos são iguais.*** (fig. 59)

H. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

T. $\begin{cases} AB = CD \quad e \quad AD = BC \\ \hat{A} = \hat{C} \quad e \quad \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$

Tracemos uma diagonal qualquer BD (§ 97, exercícios em classe, *regra*) e comparemos os ▲ ABD e BCD.

$BD = BD$

$\hat{1} = \hat{2}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AD e BC, cortadas, etc..)

$\hat{3} = \hat{4}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AB e CD, cortadas, etc..)

△ ABD = △ BCD (1.º caso de igualdade de ▲)

Completando a marcação dos elementos iguais (§ 97, fig. 39) teremos AB = CD, AD = BC e $\hat{A} = \hat{C}$.

Resta provar que $\hat{B} = \hat{D}$. Já vimos que $\hat{1} = \hat{2}$ e $\hat{3} = \hat{4}$. Somando estas igualdades teremos $\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4}$ $\therefore$ $\hat{B} = \hat{D}$.

O teorema que acabámos de demonstrar tem duas conclusões distintas : *em um ▱ os lados opostos são iguais ; em um ▱ os ∡ opostos são iguais.* Temos, pois, duas recíprocas a demonstrar.

PRIMEIRA RECÍPROCA. ***Se os lados opostos de um quadrilátero são iguais, êste quadrilátero é um paralelogramo.***

$$\text{H.} \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases} \qquad \text{T.} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

Observação. Não esqueçamos que, para provar que um quadrilátero é um ▱ devemos provar que seus lados opostos são $\parallel$.

Consideremos o quadrilátero ABCD (fig. 59), tracemos a diagonal BD e comparemos os △ ABD e BCD.

AB = CD (hip.)
AD = BC (hip.)
BD = BD

△ ABD = △ BCD (3.º caso)

Completando a marcação dos elementos iguais (§ 97, fig. 39) teremos :

$$\hat{1} = \hat{2}$$
$$\hat{3} = \hat{4}$$

Temos $\hat{1} = \hat{2}$. Mas êstes dois ∡ são alt.-int. formados pelas *retas* AD e BC, cortadas pela *secante* BD ; se êles, os ∡ 1 e 2, *são iguais*, elas, as retas AD e BC, são $\parallel$. (§ 103, 1.ª recíproca)

Temos $\hat{3} = \hat{4}$. Mas êstes dois ∡ são alt.-int. formados pelas *retas* AB e CD, cortadas pela *secante* BD; se êles, os ∡ 3 e 4 são *iguais*, elas, as retas AB e CD, são $\parallel$.

E, se os lados opostos do quadrilátero ABCD são $\parallel$, êste quadrilátero é, por definição, um ▱.

Observação. A demonstração desta recíproca nos ensina mais uma regra muito útil para demonstrar teoremas.

Regra. Para provar que duas retas são $\parallel$, prova-se que os ∡ alt.-int. ou alt.-ext. ou correspondentes formados por estas retas quando cortadas por uma transversal, são iguais; ou então prova-se que os ∡ col.-int. ou col.-ext. são supls..

SEGUNDA RECÍPROCA. ***Se os ângulos opostos de um quadrilátero são iguais, êste quadrilátero é um paralelogramo.***

$$\text{H.} \begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \qquad \text{T.} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

Consideremos o quadrilátero ABCD. (fig. 59) Por hipótese...

$$\left\{\begin{matrix} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{matrix}\right\} \therefore \hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D} \qquad \left\{\begin{matrix} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{B} \end{matrix}\right\} \therefore \hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}$$

Entretanto, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=4$ retos. (§ 111) Logo, ... $\hat{A}+\hat{B}=2$ retos e $\hat{A}+\hat{D}=2$ retos.

Os ∡ A e B são supls. e são col.-int. formados pelas *retas* AD e BC, cortadas pela *secante* AB ; se êles, os ∡ A e B *são supls.*, elas, as retas AD e BC, são $\parallel$. (§ 103, 4.ª recíproca)

Os ∡ A e D são supls. e são col.-int. formados pelas *retas* AB e CD cortadas pela *secante* AD ; se êles, os ∡ A e D *são supls.*, elas, as retas AB e CD são $\parallel$.

E, se os lados opostos do quadrilátero ABCD são $\parallel$, êste quadrilátero é, por definição, um ▱.

Observação. Um ▱ tem dois ∡ agudos e dois ∡ obtusos, sujeitos às relações ja conhecidas : $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$, $\hat{A} + \hat{B} =$ 2 retos, $\hat{A} + \hat{D} = 2$ retos, etc.. Como caso particular, os 4 ∡ podem ser retos.

COROLÁRIO. ***Se dois lados opostos de um quadrilátero são iguais e paralelos, êste quadrilátero é um paralelogramo.***

$$\text{H.} \begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \qquad \text{T.} \{ AD \parallel BC$$

Consideremos o quadrilátero ABCD. (fig. 59) Temos AB $\parallel$ CD (hip.) ; logo, para provar que êste quadrilátero é um ▱, é bastante provar que AD $\parallel$ BC.

Tracemos a diagonal BD e comparemos os △ ABD e BCD.

AB = CD (hip.)
BD = BD

$\hat{4} = \hat{3}$ (alt.-int. formados pelas $\parallel$ AB e CD, cortadas, etc..)

△ ABD = △ BCD (2.º caso de igualdade de △)

Completando a marcação dos elementos iguais, teremos $\hat{1} = \hat{2}$. Mas êstes dois ∡ são alt.-int. em relação às retas AD e

BC, cortadas pela secante BD. Se êles, os ∡ 1 e 2, são iguais, elas, as retas AD e BC, são ∥.

E, se os lados opostos do quadrilátero ABCD são ∥, êste quadrilátero é, por definição, um ▱.

Base de um ▱ é qualquer um de seus lados. **Altura** de um ▱ é o segmento retilíneo ⊥ à base, traçado por qualquer ponto da base oposta e limitado por estas mesmas bases.

Considerando o ▱ ABCD, se tomarmos o lado AB como base, a altura pode partir de qualquer ponto do lado CD.

Exercícios em classe

1. Provar que dois ▱ são iguais quando têm dois lados consecutivos iguais, cada um a cada um, e o ∠ por êles formado também igual, isto é, AB=A'B', AD=A'D', $\hat{A}=\hat{A}'$. (fig. 59)
2. Dado um ▱ ABCD (fig. 59) tomar como base AB, traçar duas alturas, uma pelo ponto C e outra pelo ponto D e provar que são iguais.
3. Dado um ▱ ABCD (fig. 59) tomar como base o lado BC, traçar duas alturas, uma pelo ponto A e outra pelo ponto D e provar que são iguais.
4. Construir um ▱ ABCD sendo AB=7cm, AD=5cm e $\hat{A}=48°$.
5. Construir um ▱ ABCD sendo AB=7cm, $\hat{A}=64°$, e sendo a altura relativa ao lado AB, igual a 5cm.

113. As diagonais do paralelogramo. Um ▱ qualquer ABCD (fig. 60) tem sòmente duas diagonais, AC e BD.

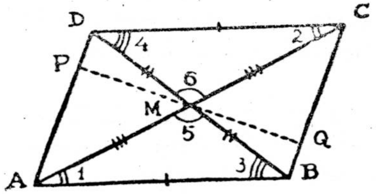


Fig. 60

TEOREMA. ***Em um paralelogramo as diagonais se dividem mutuamente em partes iguais.***

H. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

T. $\begin{cases} MA = MC \\ MB = MD \end{cases}$

Consideremos o ▱ ABCD e tracemos as diagonais AC e BD, as quais se cortam no ponto M. Em seguida comparemos os △ AMB e CMD. (§97, exercícios em classe, *regra*)

AB=CD como lados opostos de um ▱

$\hat{1} = \hat{2}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AB e CD, cortadas, etc..)

$\hat{3} = \hat{4}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AB e CD, cortadas, etc..) ∴

△ AMB = △ CMD (1.º caso de igualdade de △)

Dois △ sendo iguais, a lados iguais se opõem ∡ iguais e recìprocamente. Logo, MA = MC e MB=MD.

RECÍPROCA. ***Se as diagonais de um quadrilátero se dividem mùtuamente em partes iguais, êste quadrilátero é um paralelogramo.***

H. $\begin{cases} MA = MC \\ MB = MD \end{cases}$ T. $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AB \parallel CD \end{cases}$

Consideremos o quadrilátero ABCD (fig. 60) e tracemos as diagonais AC e BD, as quais se cortam no ponto M. Em seguida, comparemos os △ AMB e CMD. (§112, *regra*)

MA = MC (hip.)
MB = MD (hip.)
$\hat{5} = \hat{6}$ (o. p. v.)
△ AMB = △ CMD (2.º caso)

Completando a marcação teremos $\hat{1}=\hat{2}$, $\hat{3}=\hat{4}$ e AB=CD. Mas os ∡ 1 e 2 são alt.-int. formados pelas retas AB e CD, cortadas pela transversal AC. Se êles, os ∡ 1 e 2, são iguais, elas, as retas AB e CD são ∥. (§103. 1.ª recíproca) Provámos também que AB=CD. Ora, sendo AB=CD e AB ∥ CD, o quadrilátero ABCD é um ▱. (§112, corolário)

Chama-se *centro de um paralelogramo* o ponto de intersecção de suas diagonais. O ponto M (fig. 60) é o centro do ▱ ABCD. A denominação de *centro do* ▱, dada ao ponto M, provém do seguinte fato: *traçando-se pelo ponto M, um segmento qualquer PQ, limitado pelos lados do mesmo ▱, o ponto M divide êste segmento em dois segmentos iguais.*

Deixamos aos estudantes, como exercício, o prazer de provarem que MP = MQ.

Observação. Ficou demonstrado que os lados e os ∡ opostos de um ▱ são iguais; que as diagonais se dividem mùtuamente em partes iguais; que qualquer segmento retilíneo PQ, que passe pelo centro M do ▱, fica dividido em duas partes iguais: MP=MQ. Ora, estas propriedades todas do ▱ podem ser verificadas concretamente, procedendo-se do seguinte modo. Sôbre o ▱ ABCD (fig. 60) coloca-se uma folha de papel transparente que se imobiliza com um alfinete cravado no

ponto M. Decalca-se (copia-se) toda a figura. Em seguida faz-se a copia girar em tôrno do ponto M, que fica imóvel, até que o ponto C coincida com o ponto A. E então o estudante verá que:

I. AB = CD e AD = BC

II. $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$

III. MA = MC e MB = MD

IV. MP = MQ

Observação. Esta verificação é necessária, tem de ser feita, se o estudante quiser entender o parágrafo seguinte. Convém observar que, durante o movimento de rotação do segmento MC, se o ponto M permanece imóvel, se o segmento MC é invariável, então o ponto C coincidirá com o ponto A, depois de descrever a metade de uma circunferência, isto é, um arco de 180°. Dar-se-á o mesmo com os pontos A, B e D. Dizemos, em Geometria *que a figura executou uma rotação de* 180°.

Exercícios em classe

1. Construir um ▱ ABCD (fig. 60) sendo AC=8cm e BD = 6cm Quantas soluções? Por que?

2. Exercício análogo ao anterior, sendo $A\hat{M}B = 50°$.

3. Construir um ▱ ABCD (fig. 60) sendo AB=7cm, BC=5cm e AC =10cm.

4. Construir um ▱ ABCD (fig. 60) sendo AB=8cm, AC=11cm, e com 5cm de altura.

114. Simetria em relação a um ponto. No ▱ ABCD (fig. 60) vimos que o ponto M é o centro dos segmentos AC, BD e PQ, e de qualquer segmento retilíneo passando por M e tendo suas extremidades situadas nos dois lados opostos do mesmo ▱. Os pontos A e C são chamados *simétricos* em relação ao ponto M, assim como os pontos B e D, P e Q, etc..

Dois pontos P *e* P′ *são simétricos em relação a um ponto dado* M, *quando o ponto* M *é o meio ou o centro do segmento* PP′. O ponto M recebe o nome de *centro de simetria*. No ▱, o ponto de intersecção das diagonais é um centro de simetria porque, em relação a êste ponto, qualquer ponto situado no perímetro do ▱ tem sempre um ponto simétrico, no mesmo perímetro. O centro de uma ○ é também um centro de simetria porque, em relação a êste centro, qualquer ponto situado na ○ tem sempre um ponto simétrico na mesma ○; traçando-se um diâ-

metro CD em uma ○ qualquer, as suas extremidades, isto é, os pontos C e D, são dois pontos simétricos em relação ao ponto O porque êste ponto é o centro do segmento CD.

Consideremos os ⊿⊿ ABC e A′B′C′ (fig. 61) e suponhamos que os pontos A e A′ são simétricos em relação ao ponto M, assim como os pontos B e B′ e os pontos C e C′. Portanto,

H. AA′ é um segmento retilíneo; MA = MA′.
BB′ é um segmento retilíneo; MB = MB′.
CC′ é um segmento retilíneo; MC = MC′.

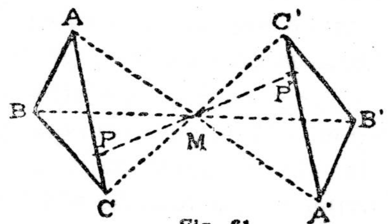


Fig. 61

Seja P um ponto qualquer situado no lado AC do △ ABC. Vamos demonstrar que existe no lado A′C′ do △ A′B′C′, um ponto P′ que é o simétrico do ponto P, em relação ao ponto M. Tracemos os segmentos retilíneos AC′ e CA′. No quadrilátero ACA′C′ as diagonais AA′ e CC′ se dividem mùtuamente em partes iguais. (hip.) Logo, êste quadrilátero é um ▱. (§112, recíproca) Ora, se traçarmos o segmento PMP′, teremos MP=MP′. (§113) Portanto, os pontos P e P′ são simétricos em relação ao ponto M, isto é, sendo P um ponto qualquer situado no △ ABC, existe sempre no △ A′B′C′ um ponto P′ simétrico do ponto P, em relação ao ponto M, e os ⊿⊿ ABC e A′B′C′ são simétricos em relação ao ponto M.

Observação. AC=A′C′ como lados opostos do ▱ ACA′C′; AB=A′B′ como lados opostos do ▱ ABA′B′; BC=B′C′ como lados opostos do ▱ BCB′C′. Donde △ ABC = △ A′B′C′. (3.º caso)

Duas figuras geométricas são simétricas em relação a um ponto dado M (fig. 61) quando, em relação a êste ponto M, um ponto qualquer P, situado na primeira figura, tem um ponto simétrico P′, situado na segunda.

Do exposto se conclue que, para construir a figura simétrica de AC, em relação a um ponto dado M, é bastante construir os pontos simétricos de A e C; logo, a figura simétrica de um segmento retilíneo AC, em relação a um ponto dado M, é também um segmento retilíneo A′C′. Para construir a figura si-

métrica de um $\triangle$ qualquer ABC, em relação a um ponto dado M, é bastante construir os pontos simétricos de A, B e C; logo a figura simétrica de um $\triangle$ é outro $\triangle$; de um $\angle$ é outro $\angle$; de um $\square$ é outro $\square$, etc..

115. Igualdade e simetria. Os $\triangle$ ABC e A'B'C' (fig. 61) serão iguais? *Duas figuras geométricas são iguais quando é possível, colocando uma sôbre a outra, fazer com que todos os pontos de uma coincidam com todos os pontos da outra e recìprocamente.* (§ 163)

Sendo os dois $\triangle$ ABC e A'B'C' (fig. 61) simétricos em relação ao ponto M do plano em que êles estão situados, a sua coincidência se faz de um modo muito simples. Imprime-se ao $\triangle$ A'B'C' um movimento de rotação em tôrno do ponto M, centro de simetria dos dois $\triangle$; quando o segmento MA' coincidir com o segmento MA, o que é possível, porque MA' = MA, a figura MA'B'C' terá realizado uma rotação de 180° (§ 113, observação) e coincidirá com a figura MABC. (Por hip., temos também MB' = MB e MC' = MC.) E assim o $\triangle$ A'B'C' coincide com o $\triangle$ ABC; logo, êstes dois $\triangle$ são iguais.

A igualdade de duas figuras planas e simétricas em relação a um ponto M situado no mesmo plano em que elas se acham, é sempre *direta* porque, como acabámos de ver, é sempre possível fazer com que elas concidam, sem que nenhuma delas abandone o plano comum. Esta igualdade é ainda *direta* porque as duas figuras iguais são do *mesmo sentido.* (§ 163)

116. Simetria em relação a uma reta. *Dois pontos são simétricos em relação a uma reta dada, quando esta é a mediatriz do segmento retilíneo que liga os dois pontos dados.* Os pontos A e A' são simétricos em relação à reta MN (fig. 62) porque esta reta é a mediatriz do segmento AA'. A reta MN recebe o nome de *eixo de simetria.* Dado um ponto qualquer A, situado fora de uma reta MN, se quisermos construir o ponto A' simétrico de A em relação à MN, é bastante traçar AP $\perp$ MN, prolongar AP e tomar um segmento PA' = AP. O ponto A' será o ponto simétrico de A em relação à MN.

Consideremos os $\triangle$ ABC e A'B'C' (fig. 62) e suponhamos que os pontos A e A' são simétricos em relação à reta MN, assim como os pontos B e B' e os pontos C e C'. Portanto,

$$\text{H.} \left\{ \begin{array}{l} AA' \perp MN\,;\ PA = PA' \\ BB' \perp MN\,;\ RB = RB' \\ CC' \perp MN\,;\ QC = QC' \end{array} \right.$$

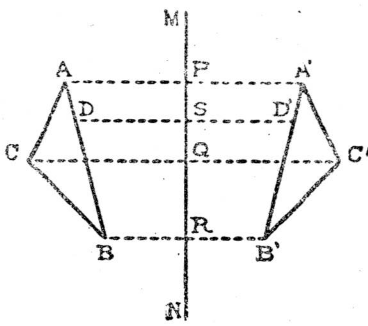


Fig. 62

Seja D um ponto qualquer situado no lado AB do $\triangle$ ABC. Vamos demonstrar que existe no lado A'B' do $\triangle$ A'B'C', um ponto D' simétrico do ponto D em relação à reta MN. Tracemos o segmento retilíneo DS $\perp$ MN e prolonguemos êste segmento até encontrar A'B' no ponto D'. A reta MN divide o plano onde estão situados os dois $\triangle$, em dois semiplanos. Façamos o semiplano direito girar em torno de MN, até coincidir com o esquerdo. Os $\angle$ MPA', MQC' e MRB' sendo retos (hip.) os segmentos PA', QC' e RB' coincidem, respectivamente, em direção, com os segmentos PA, QC e RB; mas, sendo PA' = PA, QC' = QC e RB' = RB (hip.) os pontos A', B' e C' coincidem com os pontos A, B e C. Logo, o $\triangle$ A'B'C' coincide com o $\triangle$ ABC e o lado A'B' coincide com o lado AB. Donde resulta que o ponto D' deve coincidir com um ponto qualquer do lado AB.

Mas $M\hat{S}D = M\hat{S}D'$ (construção); logo, o segmento SD' coincide, em direção com o segmento SD e o ponto D' deve coincidir com um ponto qualquer de SD ou do seu prolongamento. Nestas condições, se o ponto D' deve coincidir com um ponto qualquer de AB e um ponto qualquer de SD, então coincide com o ponto D. Segue-se que SD = SD'; e sendo MN $\perp$ DD', os pontos D e D' são simétricos em relação à reta MN.

Observação. Ficou provado ao mesmo tempo que $\triangle$ ABC = $\triangle$ A'B'C', sendo AB = A'B', AC = A'C' e BC = B'C'.

Duas figuras geométricas são simétricas em relação a uma reta dada MN (fig. 62) quando, em relação a esta reta MN, um ponto qualquer D, situado na primeira figura tem um ponto simétrico D', situado na segunda.

Portanto, para construir a figura simétrica de um segmento AB, em relação a uma reta dada MN, é bastante construir os pontos simétricos de A e B; logo, a figura simétrica de um segmento retilíneo AB, em relação a uma reta dada MN, é também um segmento retilíneo A'B'. Para construir a figura simétrica de um △ qualquer ABC, em relação a uma reta dada MN, é bastante construir os pontos simétricos de A, B e C. Logo, a figura simétrica de um △ é outro △; de um ∠ é outro ∠; de um quadrilátero é outro quadrilátero, etc..

Assim, fazendo o semiplano direito girar em torno de MN, até coincidir com o semiplano esquerdo, duas figuras planas, sendo simétricas *em relação a êste eixo*, coincidirão e serão, portanto, iguais. Entretanto, a igualdade entre estas duas figuras é *inversa*. Com efeito, elas são de *sentidos opostos* (§ 163) e é impossível fazê-las coincidir sem o rebatimento de um semíplano sobre o outro.

117. O retângulo. Em um ▱ ABCD (fig. 60) dois ∡ opostos são iguais e dois ∡ consecutivos, isto é, adjacentes a um mesmo lado, como, por exemplo, os ∡ A e B, são supls. Em geral, os quatro ∡ são agudos e obtusos; A e C sendo agudos, B e D são obtusos.

TEOREMA. ***Se um ângulo de um paralelogramo é reto, os outros três angulos também são retos.***

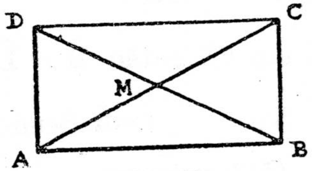


Fig. 63

H: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \\ \hat{A} = 1 \text{ reto} \end{cases}$

T. { Os ∡ B, C e D são retos.

A figura ABCD (fig. 63) é um ▱. (hip.) Logo $\hat{A} = \hat{C}$. Mas o ∠ A é reto, donde o ∠ C também é reto. Os ∡ A e D são supls. porque são col.-int. formados pelas ∥ AB e CD, cortadas pela transversal AD. Mas o ∠ A é reto; então o ∠ D, sendo suplemento do ∠ A, também é reto. Finalmente, sendo $\hat{D} = \hat{B}$, e o ∠ D sendo reto, o ∠ B também é reto.

O ▱ cujos quatro ∡ são retos é chamado *retângulo*.

Retângulo é um paralelogramo cujos quatro ângulos são retos.

Se o retângulo é um ▱ possue, então, todas as suas propriedades; seus lados opostos são iguais, seus ∡ opostos são iguais, dois ∡ consecutivos são supls., suas diagonais se dividem mùtuamente em partes iguais.

Mas o retângulo tem uma propriedade que o ▱ não tem.

TEOREMA. ***As diagonais de um retângulo são iguais.***

H. { ABCD é um retângulo. T. { AC = BD

Comparemos os △ ABC e ABD. (fig. 63)

AB = AB
BC = AD (lados opostos de um ▱)
$\hat{A} = \hat{B}$ (ABCD é um retângulo, portanto $\hat{A} = \hat{B}$)
△ ABC = △ ABD (2.º caso de igualdade de △)
AC = BD

RECÍPROCA. ***Se as diagonais de um paralelogramo são iguais, êste paralelogramo é um retangulo.***

H. $\begin{cases} \text{ABCD é um ▱.} \\ AC = BD. \end{cases}$ T. $\begin{cases} \text{ABCD é um} \\ \text{retângulo.} \end{cases}$

Comparemos os △ ABC e ABD. (fig. 63)

AB = AB
BC = AD (lados opostos de um ▱)
AC = BD (hip.)
△ ABC = △ ABD (3.º caso de igualdade de △)
$\hat{A} = \hat{B}$

Mas êstes dois ∡ são supls. porque são col.-int., formados pelas ∥ AD e BC, cortadas pela transversal AB; sendo iguais e supls., são retos. Logo, a figura ABCD é um retângulo.

Base de um retângulo é qualquer um de seus lados. *Altura* de um retângulo é o segmento ⊥ à base, traçado por qualquer ponto da base oposta. Em um retângulo ABCD, tomando como base o lado AB (fig. 63) a altura será AD ou BC, porque êstes segmentos são ⊥s AB. Tomando como base AD, a altura será AB ou CD, pela mesma razão.

Chamam-se *dimensões* de um retângulo, os comprimentos de dois lados consecutivos. Medindo os lados AB e AD do retângulo ABCD (fig. 63) obteremos as dimensões do mesmo retângulo.

O ponto de interseção das diagonais de um retângulo, isto é, o ponto M (fig. 63) é um centro de simetría.

Exercícios em classe

1. Provar que dois retângulos são iguais quando têm dois lados consecutivos iguais, cada um a cada um.
2. Dados um retângulo ABCD e um ponto qualquer M situado fora do retângulo, construir o retângulo simétrico em relação ao ponto M.
3. Dados um retângulo ABCD e uma reta qualquer MN que não o atravessa, construir o retângulo simétrico em relação à reta MN.
4. Construir um retângulo sendo AB = 7cm e AD = 5cm.
5. Construir um retângulo tendo para diagonal AC = 7cm. Quantas soluções? Por que? Conclusão?
6. Construir um retângulo tendo para diagonal AC = 7cm e sendo o ∠ das diagonais igual a 64°.
7. Construir um retângulo ABCD (fig. 63) sendo AB = 5cm e AC = 7cm.

118. O losango. Os lados opostos de um ▱ são ∥ dois a dois e iguais dois a dois. A's vêzes, os quatro lados de um ▱ são iguais. (fig. 64). Damos a êste ▱ o nome de *losango.*

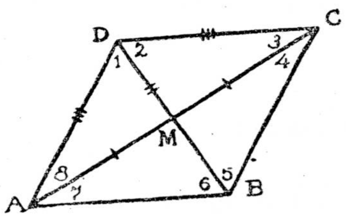


Fig. 64

Losango é um paralelogramo cujos quatro lados são iguais.

Se o losango é um ▱, possue, então, todas as suas propriedades; seus lados e ∡ opostos são iguais, dois ∡ consecutivos são supls., suas diagonais se dividem mùtuamente em partes iguais. Mas o losango tem propriedades que o ▱ não tem.

TEOREMA. ***As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e são bissetrizes dos ângulos do losango.***

$$\text{H.} \begin{cases} \text{ABCD é um ▱.} \\ AD = DC \end{cases} \qquad \text{T.} \begin{cases} AC \perp BD \\ \hat{1} = \hat{2}, \quad \hat{3} = \hat{4} \\ \hat{5} = \hat{6}, \quad \hat{7} = \hat{8} \end{cases}$$

Comparemos os △ AMD e CMD.

$$AM = MC \qquad (\S 116)$$
$$DM = DM$$

$$AD = DC \qquad \text{(hip.)}$$
$$\triangle\ AMD = \triangle\ CMD \qquad \text{(3.º caso de igualdade de △)}$$

Os dois △ sendo iguais, a lados iguais se opõem ∡ iguais. Portanto, $A\hat{M}D = C\hat{M}D$. Ora, se a diagonal DB encontra a diagonal AC formando com esta dois ∡ adjacentes iguais, DB é ⊥ à AC (§83), ou AC ⊥ à BD.

Se os △ AMD e CMD são iguais, então $\hat{1} = \hat{2}$ donde se conclue que BD é a bissetriz do ∠ D. De modo anàlogo se provará que $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{6}$ e $\hat{7} = \hat{8}$.

PRIMEIRA RECÍPROCA. ***Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si, êste paralelogramo é um losango.***

$$\text{H.} \begin{cases} \text{ABCD é um ▱.} \\ AC \perp BD \end{cases} \qquad \text{T.} \{ AB = BC$$

Comparęmos os △ AMB e CMB (fig. 64).

$$AM = CM \qquad (\S 116)$$
$$BM = BM$$
$$A\hat{M}B = C\hat{M}B \qquad \text{(hip.)}$$
$$\triangle\ AMB = \triangle\ CMB \qquad \text{(2.º caso de igualdade de △)}$$

Portanto, AB = BC, e o ▱ ABCD é um losango.

SEGUNDA RECÍPROCA. ***Se uma diagonal de um paralelogramo é bissetriz de dois ângulos opostos do paralelogramo, êste paralelogramo é um losango.***

$$\text{H} \begin{cases} \text{ABCD é um ▱.} \\ \hat{1} = \hat{2}, \quad \hat{5} = \hat{6} \end{cases} \qquad \text{T.} \{ AB = AD$$

Se o quadrilátero ABCD (fig. 64) é um ▱, então $\hat{B} = \hat{D}$ (§115) $\therefore\ \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{D}}{2}$. Mas $\frac{\hat{B}}{2} = \hat{6}$ e $\frac{\hat{D}}{2} = \hat{1}$ (hip.) $\therefore\ \hat{1} = \hat{6}$. Sendo $\hat{1} = \hat{6}$ segue-se que, no △ ABD, AB = AD. (§97, recíproca)

A base e a altura de um losango se definem como a base e a altura de um ▱.

Exercícios em classe

1. Provar que dois losangos são iguais quando têm um lado igual e um ∠ também igual.
2. Provar que o ponto de intersecção das diagonais de um losango é um centro de simetria.

3. Provar que a diagonal de um losango é um eixo de simetria.

4. Dados um losango ABCD e um ponto qualquer M situado fora do losango, construir o losango simétrico em relação ao ponto M.

5. Dados um losango ABCD e uma reta qualquer MN situada fora do losango, construir o losango simétrico em relação à reta MN.

6. Construir um losango ABCD (fig. 64) sendo AB=6cm e $\hat{A}$=63°.

7. Construir um losango ABCD (fig. 64) sendo AC=8cm e BD=5cm.

8. Construir um losango ABCD (fig. 64) sendo AC=8cm e AD=7cm.

9. Dado um losango ABCD (fig. 64) tomar como base o lado BC e traçar duas alturas, uma pelo ponto B e outra pelo ponto C; provar que as duas alturas são iguais.

119. O quadrado. Consideremos o ▱ ABCD (fig. 65) e suponhamos que os quatro lados são iguais e os quatro ∡s são retos. Portanto êste ▱ é, ao mesmo tempo, um retângulo e um losango, e tem o nome particular de *quadrado*.

Observação. Embora o quadrado seja, de fato, um losango, reserva-se o nome de *losango* ao quadrilatero que tem os quatro lados iguais, sem ter os quatro ângulos iguais.

O quadrado reúne todas as propriedades do retângulo e do losango, a saber:

I. Os quatro ∡s são retos.
II. Os quatro lados são iguais.
III. As diagonais são iguais.
IV. As diagonais são ⊥s entre si.
V. As diagonais são bissetrizes dos ∡s do quadrado.

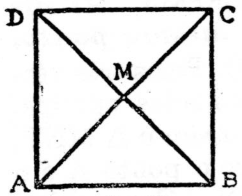


Fig. 65

Quadrado é o quadrilátero cujos quatro lados são iguais e cujos quatro ângulos são retos.

A base de um quadrado é qualquer um de seus lados, por exemplo AB. (fig. 65) Então a altura será um dos lados consecutivos, isto é, AD ou BC. (§112) Sendo ABCD um quadrado, a base é igual à altura, isto é, as *dimensões* de um quadrado são iguais.

O quadrado é a *unidade de área* universalmente adotada. Como unidade de área toma-se um quadrado *cujo lado* seja a unidade de comprimento. Assim, *o metro quadrado é o quadrado cujo lado tem um metro de comprimento.*

E' fácil demonstrar de um modo concreto que, se o lado do quadrado ABCD mede, por exemplo, 15cm, êste quadrado contém 15×15 ou 15^2 centímetros quadrados. Portanto, para calcular a área de um quadrado, é bastante medir o comprimento de um de seus lados e multiplicar o número obtido por si mesmo, isto é, *calcular a segunda potência do número obtido.* Eis por que as expressões 7^2, 15^2, a^2, são chamadas, em Matemática, *quadrado de* 7, *quadrado de* 15, *quadrado de* **a**, etc..

Exercícios em classe

1. Provar que dois quadrados são iguais, quando têm um lado igual.

2. Provar que o ponto de intersecção das diagonais de um quadrado é um centro de simetria; provar que a diagonal é um eixo de simetria.

3. Dão-se um quadrado ABCD e um ponto qualquer M situado fora do quadrado; construir o quadrado simétrico em relação ao ponto M.

4. Dão-se um quadrado ABCD e uma reta qualquer MN situada fora do quadrado; construir o quadrado simétrico em relação à reta MN.

5. Construir um quadrado cujo lado meça 6cm.

6. Construir um quadrado cuja diagonal meça 8cm.

7. Dado um quadrado ABCD (fig. 65) traçam-se as diagonais; provar que os quatro △s são retângulos, isósceles e são iguais.

120. O trapézio. Já foi definido. (*)

A base de um trapézio não é qualquer um de seus lados, como acontece com o ▱, o retângulo, o losango e o quadrado; *a base de um trapézio é um de seus lados* ∥. Um trapézio qualquer ABCD (fig. 66) tem duas bases porque tem sòmente dois lados ∥; estas duas bases não podem ser iguais porque, sendo ∥, se fossem iguais, a figura ABCD seria um ▱. (§112, corolário) Para distinguir as bases de um trapézio é bastante dizer *base maior* e *base menor*. No trapézio ABCD, AB é a base maior e CD é a base menor.

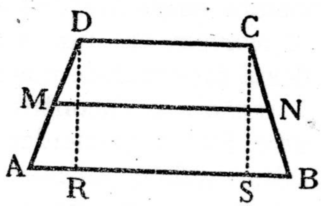


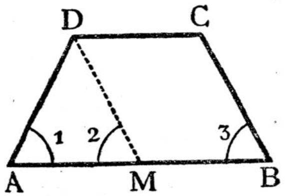
Fig. 66

Altura de um trapézio é o segmento retilíneo ⊥ às duas bases e por elas limitado. No trapézio ABCD o segmento DR ou CS, ⊥ às bases, é a altura do trapézio. No trapézio retângulo um lado sendo ⊥ às bases pode representar a altura do trapézio.

(*) E.M.P.V. §38.

Mediana de um trapézio é o segmento retilíneo que liga os meios dos lados não ||. No trapézio ABCD, se MA=MD e NB=NC, então MN é a mediana do trapézio. Dá-se também à mediana de um trapézio o nome de *base média*. Adiante veremos por que.

TEOREMA. ***Em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes a cada uma das bases são iguais.***



. .Fig. 67

H. $\begin{cases} \text{ABCD é um trapézio.} \\ AB \parallel CD\ ;\ AD = BC \end{cases}$

T. $\{\ \hat{A} = \hat{B}\ ;\ \hat{C} = \hat{D}$

Pelo vértice D tracemos DM || BC. Sendo AB || CD (hip.) e DM || BC (construção) o quadrilátero MBCD é um ▱ .·. DM = BC. Porém, AD = BC (hip.). Logo, DM = AD. Nestas condições, o △ DAM é isósceles .·. $\hat{1} = \hat{2}$. Ora;

$\hat{2} = \hat{3}$ (correspondentes formados pelas || MD e BC, cortadas etc..

$\hat{2} = \hat{1}$ (como foi demonstrado).

Logo, ... $\hat{1} = \hat{3}$ ou $\hat{A} = \hat{B}$.

Deixamos aos estudantes o prazer de provarem que $\hat{C} = \hat{D}$.

121. As mediatrizes de um triângulo. (*) Se traçarmos um △ e as suas mediatrizes, com todo o rigor possível, verificaremos que elas se encontram, concorrem em um mesmo ponto. Somos então levados a afirmar que as três mediatrizes de um △ concorrem em um mesmo ponto. Entretanto, a demonstração desta propriedade das mediatrizes, feita pelo desenho, não satisfaz à razão; o encontro das três mediatrizes pode ser atribuído a uma forma particular do △; a nossa acuidade visual não permite também afirmar que as três mediatrizes se encontrem, realmente, em um mesmo ponto. Daí a necessidade de demonstrar esta propriedade das mediatrizes, de uma maneira independente da forma do △, e sem recorrer ao desenho.

(*) Assim designaremos, abreviadamente, as mediatrizes dos lados de um △.

TEOREMA. ***As mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.*** (fig. 68)

Seja o △ ABC. Tracemos as mediatrizes MM′ e NN′. Estas duas mediatrizes se encontram sempre. Com efeito, os ∡ BDP e BEP são retos por construção; ligando o ponto D ao ao ponto E, a soma dos ∡ PDE e PED será inferior a dois retos. Ora, quando duas retas MM′ e NN′ são cortadas por uma transversal DE, estas duas retas se encontram sempre, do lado em que a soma dos dois ∡ col.-int. é inferior a dois retos. (axioma n.º 11 de Euclides) Portanto, as mediatrizes MM′ e NN′ se encontram sempre em um ponto P.

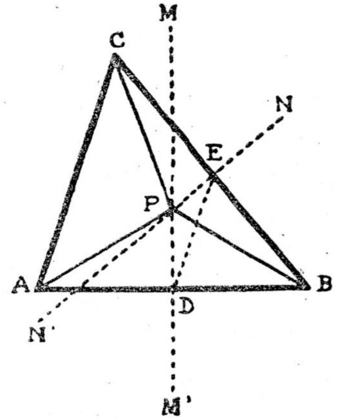


Fig. 68

Ora, o ponto P está situado na mediatriz do segmento AB; portanto PA=PB. (§90) O ponto P está situado na mediatriz do segmento BC; portanto, PC=PB.

Sendo PA=PB e PC=PB, então PA=PC. Ora, se o ponto P dista igualmente dos pontos A e C, conclue-se que o ponto P está na mediatriz do segmento AC (§90), isto é, a mediatriz do segmento AC também passa pelo ponto P.

122. As alturas de um triângulo. TEOREMA. ***As alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.***

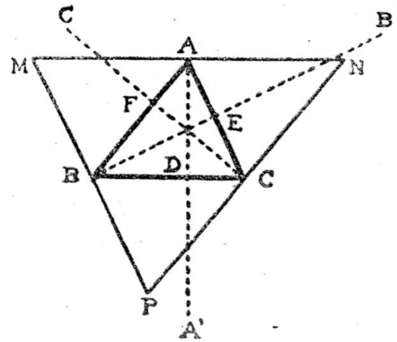


Fig. 69

Seja o △ ABC. Pelos três vértices tracemos || aos lados opostos. Formaremos assim o △ MNP. Vamos provar que o ponto A é o meio do lado MN. Com efeito, sendo MN || BC, MP || AC e NP || AB (construção) os quadriláteros AMBC e ANCB são ▱. (§112) Portanto, AM=BC e AN=BC .·. AM=AN. Sendo AM=AN, então o vértice A é o meio do lado MN. De modo análogo pro-

varemos que os vértices B e C são, respectivamente, os meios dos lados MP e NP do △ MNP.

Isto pôsto, tracemos a mediatriz AA′ do segmento MN. Sendo MN ∥ BC (construção) e sendo AA′ ⊥ a MN (§90). segue-se que AA′ é ⊥ a BC. (§102, 3.º corolário do postulado de Euclides) Então o segmento AD da mediatriz AA′ é altura do △ ABC em relação ao lado BC. De modo análogo provaremos que o segmento BE da mediatriz BB′ é altura do △ ABC em relação ao lado AC, e que o segmento CF da mediatriz CC′ é altura do △ ABC em relação ao lado AB.

Mas já ficou demonstrado que as mediatrizes de um △ concorrem em um mesmo ponto. (§ 121) Logo, as alturas do △ ABC, que são as mediatrizes do △ MNP, também concorrem em um mesmo ponto.

123. As bissetrizes de um triângulo. TEOREMA. ***As bissetrizes de um triangulo concorrem em um mesmo ponto.***

Seja o △ ABC. (fig. 70) Tracemos as bissetrizes BE e CF dos ∡ B e C. Estas duas bissetrizes se encontram sempre. Com efeito, $\hat{B}+\hat{C} < 2$ *retos*. (§109) Com mais razão $\hat{a}+\hat{b} < 2$ *retos*.

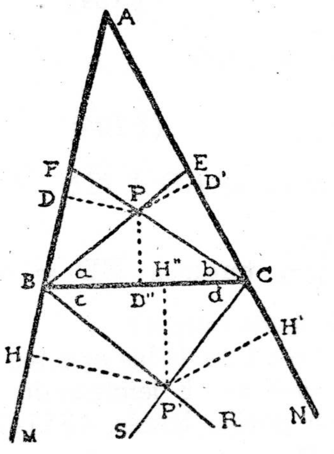


Fig. 70

Ora, quando duas retas BE e CF são cortadas por uma transversal BC, estas duas retas se encontram sempre do lado em que a soma dos dois ∡ col.-int. é inferior a dois retos. (axioma n.º 11 de Euclides) Portanto, as bissetrizes BE e CF se encontram sempre em um ponto P.

Ora, se o ponto P está situado na bissetriz do ∠ B, o ponto P dista igualmente dos lados dêste ∠, isto é, PD=PD″. (§99) Se o ponto P está situado na bissetriz do ∠ C, o ponto P dista igualmente dos lados dêste ∠, isto é, PD′=PD″.

Observação. Convém lembrar que as distâncias do ponto P aos três lados do △ ABC são os segmentos PD, PD′ e PD″, respectivamente, ⊥s aos três lados do mesmo △. (§89, 1.º teorema, observação)

Ora, sendo PD=PD″ e PD′=PD″, então, PD=PD′, isto é, o ponto P dista igualmente dos lados do ∠ A. Nestas condições, o ponto P está situado na bissetriz do ∠ A, isto é, a bissetriz do ∠ A, passa também pelo ponto P. (§102, recíproca)

TEOREMA. ***As bissetrizes de dois ângulos externos de um triângulo, e a bissetriz do ângulo interno não adjacente, concorrem em um mesmo ponto.***

Seja o △ ABC (fig. 70), prolonguemos os lados AB e AC, e tracemos as bissetrizes dos ∡ externos MBC e NCB. Cada um dêstes ∡ sendo inferior a dois retos, cada uma das suas metades, isto é, o ∠ *c* ou o ∠ *d* é inferior a um reto. Portanto, $\hat{c}+\hat{d} < 2$ *retos*. Então, as bissetrizes BR e CS se encontram sempre em um ponto P′.

Estando o ponto P′ na bissetriz do ∠ MBC, dista igualmente dos lados dêste ∠, isto é, P′H=P′H″. Estando o ponto P′ na bissetriz do ∠ NCB, dista igualmente dos lados deste ∠, isto é, P′H′=P′H″. De P′H=P′H″ e P′H′=P′H″ deduzimos P′H=P′H′, isto é, o ponto P′ dista igualmente de BM e CN ou AM e AN. Então o ponto P′ está na bissetriz do ∠ A, isto é, a bissetriz do ∠ A, passa também pelo ponto P′.

Observação. As três bissetrizes de um △ concorrem em um mesmo ponto P. (fig. 70) Vimos que o ponto P é *eqüidistante* dos três lados do △ ABC, isto é, os segmentos PD, PD′ e PD″, ⊥s respectivamente aos lados AB, AC e BC do △ ABC, são *iguais*. As bissetrizes de dois ∡ externos, e a bissetriz do ∠ interno não adjacente também concorrem em um mesmo ponto P′; êste ponto é *eqüidistante* do lado BC e dos prolongamentos BM e CN, dos lados AB e AC, isto é, os segmentos P′H, P′H′ e P′H″, respectivamente ⊥s aos lados BM, CN e BC, são *iguais*. Veremos mais tarde, a utilidade destas observações.

124. O segmento retilíneo que liga os meios de dois lados de um triângulo. Êste segmento tem duas propriedades importantes.

TEOREMA. ***O segmento retilíneo que liga os meios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.***

$$\text{H.} \begin{cases} MA = MC \\ NB = NC \end{cases}$$

$$\text{T.} \begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \dfrac{AB}{2} \end{cases}$$

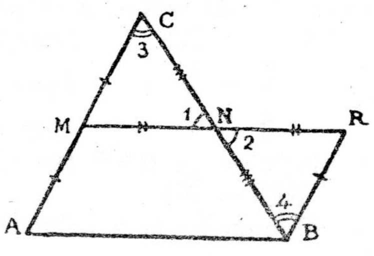


Fig. 71

Pelo ponto B tracemos BR $\parallel$ AC e prolonguemos MN até encontrar BR no ponto R. Em seguida, comparemos os $\triangle$ MNC e BRN.

$$NB = NC \quad \text{(hip.)}$$
$$\hat{1} = \hat{2} \quad \text{(o. p. v.)}$$
$$\hat{3} = \hat{4} \quad \text{(alt.-int. formados pelas } \parallel \text{ AC e BR, etc..)}$$
$$\triangle MNC = \triangle BRN \quad \text{(1.º caso de igualdade dos } \triangle\text{)} \therefore$$
$$MC = BR$$
$$\text{Mas } MC = MA \quad \text{(hip.)} \therefore MA = BR$$

Ora, no quadrilátero ABRM, MA=BR e MA $\parallel$ BR; logo, êste quadrilátero é um ▱ (§112, corolário) $\therefore$ MR ou MN $\parallel$ AB. Demonstrada a primeira parte da tese, passemos à segunda.

No ▱ ABRM, MR=AB (§112, teorema) Mas MN=NR $\therefore$ MR=2MN ou AB=2MN $\therefore \frac{AB}{2} = MN$ ou $MN = \frac{AB}{2}$.

RECÍPROCA. ***Se, pelo meio de um dos lados de um triângulo, traçarmos uma paralela ao segundo lado, esta paralela dividirá o terceiro lado em duas partes iguais, e será igual à metade do segundo lado.***

$$\text{H.} \left\{ \begin{array}{l} MA = MC \\ MN \parallel AB \end{array} \right.$$
$$\text{T.} \left\{ \begin{array}{l} NC = NB \\ MN = \dfrac{AB}{2} \end{array} \right.$$

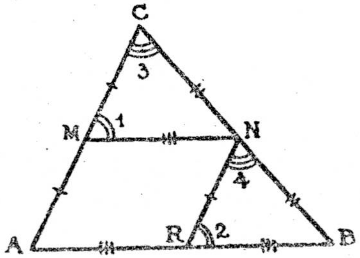


Fig. 72

Pelo ponto N tracemos NR $\parallel$ AC. Sendo MN $\parallel$ AR (hip.) e NR $\parallel$ AC (construção), a figura MNRA é um ▱. Então MA=RN. Mas MA=MC (hip.) $\therefore$ MC=RN. Comparemos os $\triangle$ MCN e RNB.

$$MC = RN \quad \text{(como foi demonstrado)}$$
$$\hat{1} = \hat{2} \quad \text{(lados } \parallel \text{ e dirigidos no mesmo sentido)}$$
$$\hat{3} = \hat{4} \quad \text{(correspondentes formados pelas } \parallel \text{ CM e NR, etc..)}$$
$$\triangle MCN = \triangle RNB \quad \text{(1.º caso de igualdade dos } \triangle\text{)} \therefore$$
$$NC = NB$$

Demonstrada a primeira parte da tese, passemos à segunda.

No ▱ MNRA, MN=AR. (§112, teorema) Devido à igualdade dos $\triangle$ MCN e RNB, temos MN=RB. Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} MN = AR \\ MN = RB \end{array} \right\} \therefore 2MN = AB \therefore MN = \frac{AB}{2}$$

125. **As medianas de um triângulo.** TEOREMA. ***As medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, e êste ponto divide cada mediana em dois segmentos tais que o menor é a metade do maior.***

Seja o $\triangle$ ABC e tracemos duas medianas quaisquer AD e BE. Estas duas medianas se encontram sempre em um ponto O. (axioma n.º 11 de Euclides) E desde que AD e BE são medianas, então EA=EC e DB=DC.

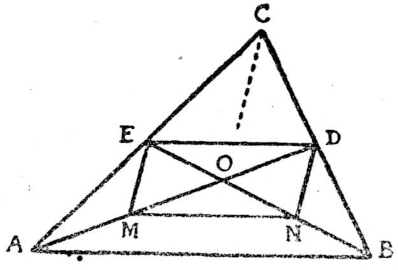


Fig. 73

Isto pôsto, seja M o meio de AO, e N o meio de BO. Tracemos os segmentos ED e MN.

No $\triangle$ ABC, sendo EA=EC e DB=DC......

$$ED \parallel AB \text{ e } ED = \frac{AB}{2} \qquad (\S 124)$$

No $\triangle$ AOB, sendo MA=MO e NB=NO......

$$MN \parallel AB \text{ e } MN = \frac{AB}{2} \qquad (\S 124)$$

Sendo ED $\parallel$ AB e MN $\parallel$ AB, teremos ED $\parallel$ MN. (§102, 1.º corolário do postulado de Euclides)

Sendo $ED = \frac{AB}{2}$ e $MN = \frac{AB}{2}$, teremos ED = MN.

(Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.)

Logo, o quadrilátero MNDE, no qual os lados opostos ED e MN são iguais e $\parallel$, é um ▱. (§112, corolário) E lembrando que as diagonais de um ▱ se dividem em partes iguais, (§114)...

$$MO = OD \quad \text{e} \quad NO = OE$$
$$\text{Mas, } MO = MA \quad \text{e} \quad NO = NB \quad \text{(construção)}$$
$$\text{Logo, } MA = MO = OD \quad \text{e} \quad NB = NO = OE.$$

Fica assim demonstrado que as medianas AD e BE se encontram em um ponto O, ficando divididas por êste ponto em dois segmentos tais que o menor é a metade do maior, isto é,

$$OD = \frac{OA}{2} \qquad OE = \frac{OB}{2}$$

Ora, é evidente que, se repetirmos a demonstração com as medianas que partem dos vértices A e C, chegaremos às mesmas conclusões ; a terceira mediana, a que parte do vértice C, passará também pelo ponto O ; porque, se não passasse por êste ponto, se passasse por um outro ponto O′ da mediana AD, teríamos dois segmentos diferentes, OD e O′D, cada um dêles igual à têrça parte de AD, o que é absurdo.

126. A mediana de um trapézio. Mediana de um trapézio é o segmento retilíneo que liga os meios dos lados não ∥.

TEOREMA. ***O segmento retilíneo que liga os meios dos lados não paralelos de um trapézio, é paralelo às bases.***

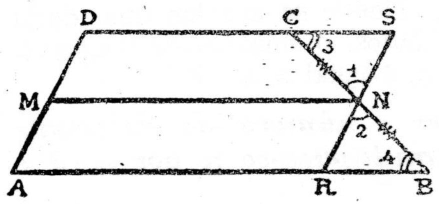


Fig. 74

$$H. \begin{cases} AB \parallel CD \\ MA = MD \\ NB = NC \end{cases}$$

$$T. \{ MN \parallel AB$$

Observação. Bastará provar que MN∥AB. Com efeito, sendo CD∥AB e se provarmos que MN∥AB, teremos MN∥CD, pelo primeiro corolário do postulado de Euclides.

Consideremos o trapézio ABCD (fig. 74) e pelo ponto N, centro de BC, tracemos RS ∥ AD. Em seguida, prolonguemos DC até encontrar RS no ponto S. O quadrilátero ARSD, seus lados opostos sendo ∥, (hip. e construção) é um ▱, donde AD=RS.

Comparemos os ⨺ NRB e NCS.

NC = NB (hip.)

$\hat{1} = \hat{2}$ (o. p. v.)

$\hat{3} = \hat{4}$ (alt.-int. formados pelas ∥ AB e DC, etc..)

△ NRB = △ NCS (1.º caso de igualdade dos ⨺) ∴

$$NS = NR = \frac{RS}{2}$$

Já vimos que AD = RS ∴ $\frac{AD}{2} = \frac{RS}{2}$ ∴

$$MA = NR \text{ e } MD = NS$$

Conclue-se então que o quadrilátero MNRA, no qual MA e NR são iguais e ∥, é um ▱ ; logo, MN ∥ AR ou MN ∥ AB.

RECÍPROCA. ***Traçando-se, pelo meio de um dos lados não paralelos de um trapézio, uma paralela a uma das bases, esta paralela divide o outro lado não paralelo em duas partes iguais.***

$$H. \begin{cases} AB \parallel CD \\ MN \parallel AB \\ MA = MD \end{cases} \qquad T. \{ NB = NC$$

Em primeiro lugar observemos que, sendo MN ∥ AB e CD ∥ AB, resulta MN ∥ CD. (§ 102)

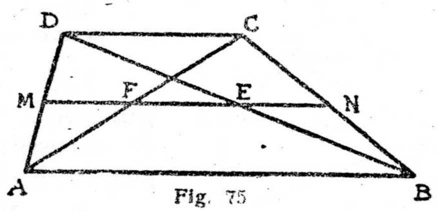


Fig. 75

No △ ABD, sendo..... MA=MD e ME ∥ AB (hip.) segue-se que EB=ED. (§ 124, recíproca) No △ BCD, sendo EB=ED e EN ∥ CD, então NB = NC.

PRIMEIRO COROLÁRIO. ***A mediana de um trapézio é igual à metade da soma das bases do mesmo trapézio.***

No △ ABD (fig. 75)... $ME = \frac{AB}{2}$ (§ 124, teorema)

No △ BCD (fig. 75)... $NE = \frac{CD}{2}$ (§ 124, teorema)

Somando as duas igualdades...

$$ME + NE = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \quad \therefore \quad MN = \frac{AB+CD}{2}$$

Portanto, *a mediana de um trapézio é a média aritmética das bases do trapézio.* Eis por que esta linha tem, em Geometria, o nome de *base média* do trapézio. (§ 122)

SEGUNDO COROLÁRIO. ***As diagonais de um trapézio interceptam na mediana ou base média, um segmento igual à semidiferença das bases.***

Observação. O ponto de intersecção das diagonais de um trapézio não pode coincidir com um ponto da base média; com efeito, se tal sucedesse, a diferença das bases seria nula, as bases seriam iguais, e o trapézio seria, na realidade, um paralelogramo.

No Δ ABD (fig. 75)..... $ME = \frac{AB}{2}$ (§124, teorema)

No Δ ACD (fig. 75)..... $MF = \frac{CD}{2}$ (§124, teorema)

Subtraindo a segunda igualdade da primeira......

$$ME - MF = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} \quad \therefore \quad EF = \frac{AB - CD}{2}$$

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLVII.

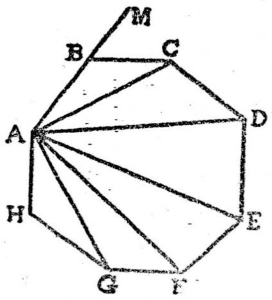


Fig. 76

127. Ângulos e diagonais de um polígono. O polígono já foi definido. (§92) E' necessário não confundir o *polígono* com a *linha quebrada* ou *poligonal*. (§96)

O polígono é uma linha quebrada ou poligonal, mas fechada. Portanto, um polígono tem, pelo menos, três lados.

Os polígonos têm nomes particulares, de acôrdo com o número de seus lados. Os principais são os seguintes: o **triângulo,** com três lados; o **quadrilátero,** com quatro lados; o **pentágono,** com cinco lados; o **hexágono,** com seis lados; o **octógono,** com oito lados; o **decágono,** com dez lados; o **dodecágono,** com doze lados; etc..

Um polígono pode ser côncavo ou convexo, plano ou reverso. (§110) Mas o Δ é sempre convexo e plano. Nestas lições elementares consideraremos sòmente polígonos convexos e planos.

Polígono regular é o polígono cujos lados e ângulos são iguais. Portanto, para provar que um polígono é regular, será necessário provar que:

a) Seus lados são iguais.

b) Seus ângulos são iguais.

O Δ equilátero é um polígono regular. (§94, corolário) O quadrado também. (§119) No Δ, a igualdade dos lados acarreta a dos $\measuredangle$, e recìprocamente. Mas êste fato só se verifica com o Δ; o losango tem os quatro lados iguais e não é um polígono regular; o retângulo tem os quatro $\measuredangle$ iguais e não é um polígono regular.

128. As diagonais de um polígono. Suponhamos que um polígono qualquer P (fig. 76) tem **n** lados; então terá também **n** vértices. Quantas diagonais podemos traçar pelo vértice A? Evidentemente, o vértice A não pode ser unido consigo mesmo. Também não pode ser unido com os vértices consecutivos B e H, porque os segmentos AB e AH são *lados* do polígono; não são *diagonais.* Mas o vértice A pode ser unido com os demais vértices do polígono, e os segmentos resultantes são diagonais. Donde se conclue que, dado um polígono qualquer P, com **n** lados, o número de diagonais que podemos traçar pelo vertice A é igual a **n − 3.**

TEOREMA. ***Para determinar o número de diagonais de um polígono de n lados, multiplica-se n por n - 3 e divide-se o produto por 2.***

Seja o polígono qualquer ABCDEFGHA (fig. 76) e admitamos que êle tem **n** lados. Pelo vértice A podemos traçar **n − 3** diagonais; partindo de cada um dos vértices B, C, D... etc., podemos traçar **n − 3** diagonais. Ora, se o polígono tem *n* vértices e, partindo de cada um dêles, podemos traçar **n** − 3 diagonais, o número total de diagonais é **n(n − 3).** (?) E' o que parece, mas não é verdade, porque cada diagonal foi contada duas vêzes. Por exemplo, a diagonal AE foi contada duas vêzes: a primeira, quando contámos as diagonais traçadas pelo vértice A, e a segunda, quando contámos as diagonais traçadas pelo vértice E. Então o número de diagonais distintas no polígono de **n** lados, é a metade do producto **n(n − 3).**

Representando por **d** o número de diagonais de um polígono qualquer com **n** lados, teremos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \qquad \text{[Formula A]}$$

Aplicando esta fórmula ao △, teremos $d = \frac{3(3-3)}{2} = zero.$

Com efeito, o △ não tem diagonais. Aplicando-a a um quadrilátero qualquer, teremos $d = \frac{4(4-3)}{2} = 2$; o quadrilátero tem duas diagonais. Aplicando-a a um polígono de 23 lados, teremos $d = \frac{23\,(23-3)}{2} = \frac{23 \times 20}{2} = 230$; o polígono de 23 lados tem 230 diagonais.

Problema. Sendo dado o número de diagonais de um polígono, isto é, **d**, determinar o número de lados, isto é, **n.**

Tirando da fórmula A, o valor de n, teremos sucessivamente:

$$2d = n(n-3) \qquad 2d - n^2 + 3n = 0$$
$$2d = n^2 - 3n \qquad n^2 - 3n - 2d = 0$$

E não podemos prosseguir; chegámos a uma equação do segundo grau, que ainda não sabemos resolver, a não ser em certos casos particulares. (§75)

129. A soma dos ângulos de um polígono. A soma dos ∡ de um △ é igual a dois retos (§109); a soma dos ∡ de um quadrilátero é igual a quatro retos. (§111)

TEOREMA. ***Se um polígono tem n lados, a soma de seus ângulos é igual a 2 (n - 2) ângulos retos isto é, tantas vêzes dois retos, quantos são os lados menos dois.***

Consideremos um polígono ABCDEFGA (fig. 76), com n lados. Por um vertice qualquer, A, tracemos as **n** − 3 diagonais. (§ 128) Ora, se observarmos atentamente a figura, verificaremos que o polígono fica decomposto em ⚠ ABC, ACD, ADE, AEF, AFG e AGH, cujas bases são BC, CD, DE, EF, FG e GH. Donde se conclue que, num polígono qualquer P com n lados, se traçarmos por um de seus vértices, A, todas as diagonais possíveis, o polígono ficará decomposto em tantos ⚠ quantos são os lados menos dois, isto é, ficará decomposto em **n** − 2 ⚠.

A soma dos ∡ de um △ é igual a **dois retos.** Se o polígono P está decomposto em **n** − 2 ⚠, a soma dos ∡ dos **n** − 2 ⚠ é igual a 2(**n** − 2) **retos.** Mas a figura nos mostra com evidência que os ∡ dos ⚠, somados convenientemente, são os ∡ do polígono. Logo,

Soma ∡ internos de um polígono = 2(n − 2) retos.

Ou, representando por S a soma dos ∡ internos...

$$S = 2\,(n-2) \text{ retos}$$

130. O ângulo de um polígono regular. Em um polígono regular (§127) todos os ∡ são iguais. Ao polígono cujos ∡ são iguais dá-se o nome de *polígono equiângulo.* Um polígono regular é equiângulo, mas a recíproca nem sempre é verdadeira; o retângulo é um polígono equiângulo, mas não é regular.

Seja um polígono regular P com n lados. A soma de seus ∡ internos é $2(n-2)$ retos. Se o polígono tem **n** ∡, e se êstes ∡ são iguais, segue-se que a amplitude do ∠ de um polígono regular com n lados é

$$\frac{2(n-2)\ retos}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{180(n-2)\ graus}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{200\,(n-2)\ grados}{n}$$

Exercícios em classe

Organizar um quadro com os valores dos ∡ dos polígonos regulares de 3 a 12 lados.

Observação. O ∠ de um polígono regular depende do número de lados do mesmo polígono. Da observação das fórmulas que nos dão o valor dêste ângulo, concluímos que:

1.º) À medida que o número de lados de um polígono regular aumenta, o valor do ∠ do mesmo polígono também aumenta.

2.º) O ∠ de um polígono regular não pode ser um ∠ qualquer. Por exemplo, não existe um polígono regular cujo ∠ tenha 75°, 100°, 115°, 125°, etc..

131. A soma dos ângulos externos de um polígono. Consideremos um polígono qualquer ABCDEA (fig. 77) e prolonguemos todos os seus lados no mesmo sentido, isto é, percorrendo, por exemplo, o contôrno, na ordem alfabética. Formaremos assim os ∡ externos do mesmo polígono. Suponhamos que o polígono dado

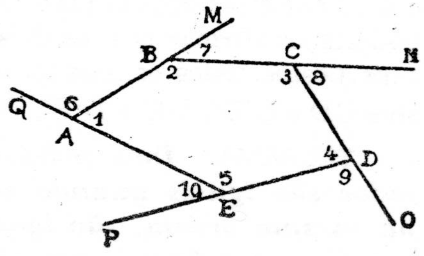


Fig. 77

tem n lados; então terá n vértices, e os ∡ externos que traçámos serão também em número de n.

TEOREMA. ***A soma dos angulos externos de um polígono, quando seus lados são prolongados no mesmo sentido, é igual a quatro ângulos retos.***

Em cada vértice do polígono dado (fig. 77) há dois ∡, um interno e outro externo, adjacentes e supls..

Por exemplo, $\hat{1}+\hat{6}=2$ **retos**, $\hat{2}+\hat{7}=2$ **retos**, etc.. Se o polígono tem n vértices; se em cada vértice há dois ∡, um interno e outro externo, cuja soma é igual a 2 retos, teremos:

$$\textit{soma } \measuredangle \textit{ int.} + \textit{soma } \measuredangle \textit{ ext.} = 2n \textit{ retos}$$

Ou, representando por S', a soma dos ∡ externos......

$$S + S' = 2n \textit{ retos} \qquad (1)$$

Ora, nesta igualdade, o primeiro têrmo do primeiro membro é igual a 2 (n − 2) retos. Substituindo em (1) teremos:

$$\begin{aligned} 2(n-2)\textit{ retos} + S' &= 2n \text{ retos} \\ 2n \textit{ retos} - 4 \textit{ retos} + S' &= 2n \textit{ retos} \\ S' &= 2n \textit{ retos} - 2n \textit{ retos} + 4 \textit{ retos} \\ S' &= 4 \textit{ retos.} \end{aligned}$$

Observação. Em um polígono regular de n lados, um ∠ externo é igual a $\dfrac{4 \textit{ retos}}{n}$.

132. **Igualdade de polígonos.** Consideremos os polígonos ABCDEA e A'B'C'D'E'A'. (fig. 78) Para que sejam iguais é evidente, em primeiro lugar, que devem ter o mesmo número de lados. Satisfeita esta condição, se nos afirmarem que seus lados e ∡ são iguais, dois a dois, exceto dois lados (CD e C'D', DE e D'E') e o ∠ por êles formado ($\hat{D}$ e $\hat{D}'$), *a respeito dos quais nada se sabe,* poderemos afirmar que os dois polígonos são iguais, isto é, sendo superpostos, todos os seus elementos coincidem dois a dois, inclusive CD e C'D', DE e D'E', $\hat{D}$ e $\hat{D}'$. E' o que significa o seguinte

TEOREMA. ***Dois polígonos com o mesmo número de lados são iguais quando seus lados e ângulos, dispostos na mesma ordem, são iguais, excetuando dois lados consecutivos e o ângulo por êles formado.***

$$\text{H.} \begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ AE = A'E' \\ \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}', \quad \hat{E} = \hat{E}' \end{cases}$$

T. $\Big\{$ Os dois polígonos são iguais.

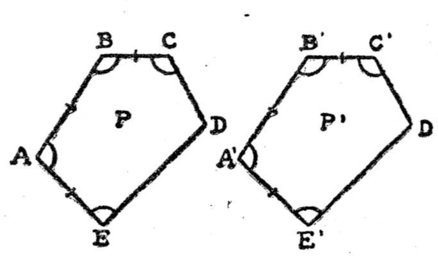


Fig. 78

Façamos o polígono P' deslizar no plano da figura, até que A'B' coincida com AB, o que é possível. (hip.) Sendo $\hat{B} = \hat{B}'$, o lado B'C' coincide, em direção, com o lado BC, e por ser B'C' = BC, o vértice C' coincide com o vertice C. Sendo $\hat{C} = \hat{C}'$, o lado C'D' coincide, em direção, com o lado CD, e o vértice C' *coincide com um ponto qualquer do lado* CD *ou do seu prolongamento.*

Sendo $\hat{A}=\hat{A}'$, o lado A'E' coincide, em direção, com o lado AE, e por ser A'E' = AE, o vértice E' coincide com o vértice E. Sendo $\hat{E}=\hat{E}'$, o lado E'D' coincide, em direção, com o lado ED, e o vértice D' *coincide com um ponto qualquer do lado* ED *ou do seu prolongamento.*

Se o vértice D' deve coincidir ao mesmo tempo com um ponto qualquer dos lados CD e DE, então coincide com o vértice D, que é o único ponto comum a êstes dois lados. Nestas condições, os dois polígonos *coincidem* em toda a sua extensão e são, por conseqüência, *iguais.*

Observação. Nesta demonstração, admitimos que os dois poligonos são do *mesmo sentido.* (§ 163) Se forem de *sentidos opostos,* já sabemos como proceder.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLVIII.

Capítulo VIII

O Círculo

133. A circunferência é um lugar geométrico. Já aprendemos (E.M.P.V. § 27) o que é *circunferência, círculo, centro, raio, diâmetro, arco e corda.*

A O, sendo uma linha plana e fechada, divide o plano em que está situada, em duas regiões distintas: *uma região interior,* que contém o centro da O e todos os pontos do círculo; *uma região exterior,* que não contém pontos do círculo.

Os pontos da O estão situados simultâneamente nas duas regiões. Seja R o raio de uma O.

As posições relativas de um ponto e de uma O são três.

1.ª *O ponto* B (fig. 79) *está situado na região exterior da* O. Neste caso, teremos com evidência:

$$OB > R$$

E o ponto B é chamado *ponto exterior.*

2.ª *O ponto* A *está situado na* O. Neste caso, teremos:

$$OA = R$$

3.ª *O ponto* C *está situado na região interior da* O. Neste último caso, teremos com evidência:

$$OC < R$$

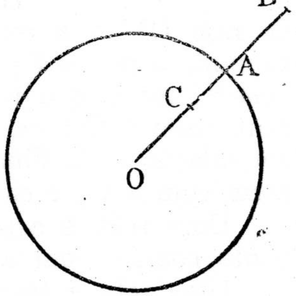


Fig. 79

E o ponto C é chamado *ponto interior.*

Em resumo, representando por M um ponto situado no plano de uma O, por R o raio da mesma O e por d a distância do ponto M ao centro da O, fica estabelecido que:

1.º Sendo M um ponto exterior, $d > R$.
2.º Sendo M um ponto interior, $d < R$.
3.º Estando o ponto M na O, $d = R$.

Imaginemos uma O traçada em um terreno plano, e com um raio de 50 metros. Um indivíduo situado a 46 metros do centro desta O está no *interior* dela; um indivíduo situado a 54 metros do centro está no *exterior* dela.

Problema. E' dado um segmento retilíneo AB (fig. 80) com 10cm. Determinar, no plano em que se acha êste segmento, um ponto situado a 8cm do ponto A e a 6cm do ponto B.

Solução. Fazendo centro no ponto A e com um raio de 8cm, traça-se uma O. Se o ponto pedido existe, *êle deve estar situado nesta* O. Com efeito, não pode ser *exterior* em relação a esta O, porque então sua distância ao ponto A seria maior que 8cm; também não pode ser *interior* porque então sua distância ao ponto A seria menor que 8cm; logo, o ponto pedido deve estar na O.

Fazendo centro no ponto B e com um raio de 6cm, traça-se outra O. Se o ponto pedido existe, *êle deve estar situado também nesta segunda* O, como é fácil de provar.

Ora, as duas ⓢ se cortam nos pontos C e C′. Estando o ponto C situado a 8cm do ponto A e a 6cm do ponto B, é êle uma solução do problema. E visto que o ponto C′ preenche também as condições impostas pelo problema, segue-se que êste tem duas soluções.

Observação. Os estudantes deverão verificar que êste problema pode ter duas soluções, uma ou nenhuma; determinarão também quais as condições necessárias para que as soluções sejam duas, uma ou nenhuma.

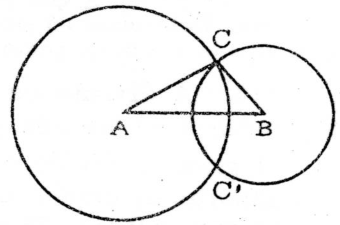


Fig. 80

Dêste problema resulta que a O é também um *lugar geométrico.* Com efeito, se o ponto pedido deve estar situado a 8cm do ponto A, nós não hesitamos; imediatamente fazemos centro no ponto A e, com um raio AC, de 8cm, traçamos uma O. *E' sòmente nesta* O *que existem pontos situados a 8cm do ponto* A; fora dela, ou no interior dela, *não existem pontos situados a 8cm do ponto* A. Todos os pontos desta O, de centro A e raio AC, gozam, pois, de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence, absolutamente, aos pontos situados no interior ou no exterior da mesma O.

Portanto, a ○ é um *lugar geométrico.* (§ 91)

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos situados a uma distância dada de um ponto dado.

O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância dada, de um ponto dado, é uma circunferência cujo centro é o ponto dado e cujo raio é a distância dada.

Exercícios em classe

1. Uma reta AB e um ponto C situado fora desta reta determinam um plano. Determinar neste plano um ponto P situado a 5cm da reta AB e do ponto C.

2. Três pontos dados A, B e C, não situados em linha reta, determinam um plano. Determinar neste plano um ponto P eqüidistante dos pontos A e B, e situado a 5cm do ponto C.

3. Dado um ∠ MON e dois pontos quaisquer A e B situados no plano do ∠, determinar um ponto P eqüidistante dos lados do ∠, assim como dos pontos A e B.

4. Traçar um ∠ qualquer MON. Tomar no lado OM um segmento OA com 7cm. Determinar no plano do ∠, um ponto P eqüidistante dos lados do ∠ e situado a 4cm do ponto A.

134. A divisão da circunferência. Os geômetras antigos dividiram a ○ em 360 partes iguais chamadas **graus.**

O grau se divide em 60 partes iguais chamadas *minutos*, e o minuto se divide em 60 partes iguais chamadas *segundos*. Se um arco AB tem 75 graus, 48 minutos e 24 segundos, escreveremos abreviadamente 75° 48′ 24″.

Modernamente a ○ é também dividida em 400 partes iguais chamadas **grados.** (*) Os submúltiplos do grado são o decigrado, o centigrado e o miligrado.

A vantagem da divisão centesimal da ○ sôbre a divisão sexagesimal é manifesta. Na divisão centesimal temos de operar com frações decimais, ao passo que na divisão sexagesimal temos de operar com números complexos.

(*) Convém reler E. M. S. V. § 27.

135. A secante e a tangente. Uma reta não pode cortar uma ○ em mais de dois pontos. Suponhamos que a reta AB (fig. 81) corta a ○ de raio OA em três pontos distintos, A, B e C. Se êstes três pontos estão situados na ○, os segmentos OA, OB e OC são iguais como raios de uma mesma ○. Ora, OA = OB = OC, não é possível. (§ 89) Logo, uma reta não pode cortar uma ○ em mais de dois pontos.

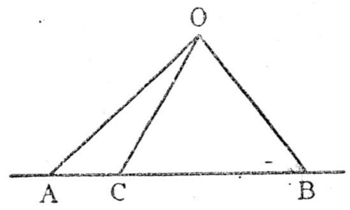


Fig. 81

Dadas uma ○ e uma reta situadas de uma maneira qualquer num plano, estas duas linhas podem ter dois pontos comuns, um ou nenhum. Consideremos a ○ de raio OM e a reta FG. (fig. 82) Estas duas linhas têm dois pontos comuns, os pontos F e G; diz-se então que a reta FG é uma *secante* e os pontos F e G são chamados *pontos de intersecção* da secante com a ○; os pontos do segmento FG são *interiores* e os pontos situados nos dois prolongamentos do segmento FG são *exteriores* em relação à ○. Consideremos a mesma ○ de raio OM e a reta CD. Estas duas linhas têm um ponto comum, o ponto E; a reta CD é chamada *tangente* (do latim *tangere*, tocar) e o ponto E é chamado *ponto de contacto* da tangente com a ○; os demais pontos da reta CD são exteriores em relação à ○. Finalmente, a reta AB, que não tem ponto comum com a ○, é chamada *exterior.*

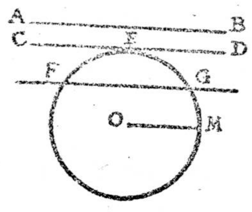


Fig. 82

Uma reta é exterior a uma ○ quando não tem nenhum ponto comum com a ○.

Uma reta é tangente a uma ○ quando tem um ponto comum com a ○; êste ponto comum é chamado *ponto de contacto.*

Uma reta é secante a uma ○ quando tem dois pontos comuns com a ○; êstes dois pontos comuns são chamados *pontos de intersecção.*

A ○ é uma curva convexa porque, em relação a qualquer das suas tangentes, ela fica sempre do mesmo lado da tangente.

Consideremos a ○ de centro N, cortada pela secante RST. (fig. 83) Façamos esta girar no plano da figura, em tôrno do

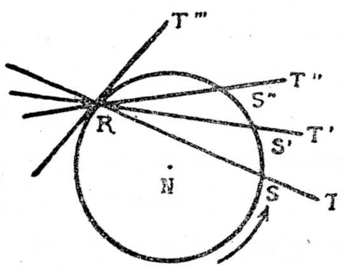


Fig. 83

ponto R que permanece imóvel, e no sentido indicado pela seta. (A secante RST executa um movimento análogo ao do ponteiro de um relogio,mas em sentido inverso.) E' então evidente que o ponto S, segundo ponto de intersecção da secante com a ○, vai-se aproximando do ponto R, primeiro ponto de intersecção da mesma secante com a mesma ○, e a secante RST vai tomando, sucessivamente, as posições RT, RT′, RT″, RT‴, etc.. Chegará então um momento em que o ponto S coincidirá com o ponto R e a secante RST, tendo sòmente um ponto comum com a ○, passará a ser tangente à mesma ○, no ponto R. Do que acabámos de dizer resulta, para a tangente, a seguinte definição:

Tangente a uma ○ é a posição final de uma secante que gira em tôrno de um dos pontos de intersecção, até que o segundo coincida com o primeiro.

136. Arcos e cordas. PRIMEIRO TEOREMA. ***Um diâmetro qualquer divide a circunferência em duas partes iguais.***

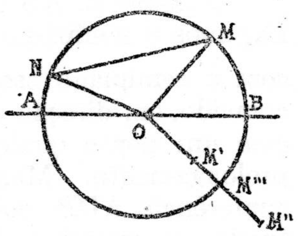


Fig. 84

Na ○ de centro O e raio OM, tracemos um diâmetro qualquer AB. Êste diâmetro, suficientemente prolongado nos dois sentidos, divide o plano onde se acha a ○, em dois semiplanos : o superior e o inferior. Tomemos um ponto qualquer M, situado na ○ e no semiplano superior, façamos êste semiplano girar em tôrno de AB, até coincidir com o semiplano inferior, e suponhamos que o ponto M coincide com o ponto M′, situado no interior da ○. Então o segmento OM toma a posição OM′ e teremos OM = OM′, o que não pode ser porque, sendo M′ um ponto interior, devemos ter OM′ < OM.

Suponhamos que o ponto M coincide com o ponto M″, situado no exterior da ○. Então, o segmento OM toma a posição OM″ e teremos OM = OM″, o que não pode ser porque, sendo M″ um ponto exterior, devemos ter OM″ > OM.

Segue-se que o ponto M, não podendo coincidir com um ponto do semiplano inferior, que esteja situado no interior ou no exterior da ○, deve coincidir com um ponto situado na ○, por exemplo, com o ponto M‴.

Ora, se um ponto qualquer M, situado no arco superior AB, deve coincidir com um ponto M‴ situado no arco inferior AB, êstes dois arcos coincidem em toda a sua extensão e são, por conseqüência, iguais. Cada um dêstes arcos é, pois, uma metade da ○. Torna-se também evidente que a porção de círculo limitada pelo diâmetro AB e pelo arco AMB coincide com a porção de círculo limitada pelo diâmetro AB e pelo arco AM‴B ; então cada uma destas porções é uma metade do círculo.

SEGUNDO TEOREMA. ***A maior corda que se pode traçar em uma circunferência é um diâmetro.***

Consideremos o diâmetro AB, uma corda qualquer MN, (fig. 84) e tracemos os raios OM e ON.

H. { AB é um diâmetro e MN é uma corda qualquer.

T. { MN < AB

Com efeito,

MN < ON + OM (por que?) ∴
MN < OA + OB (por que?) ∴
MN < AB (por que?)

C. Q. D.

TERCEIRO TEOREMA. ***Em uma circunferência ou em duas circunferências com raios iguais, arcos iguais são subtendidos por cordas iguais.***

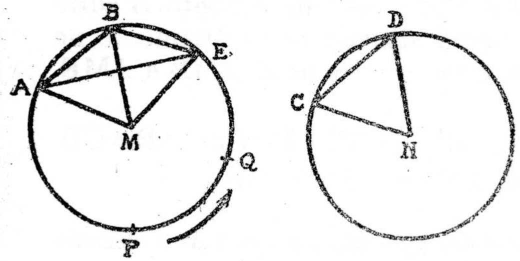


Fig. 85

Observação. Dois arcos AB e PQ são iguais quando é possível fazê-los coincidir. Copiemos em papel transparente a ○ de raio MA, coloquemos a cópia sôbre o original de modo que os centros das duas Ⓢ coincidam, imobilizemos os dois centros com um alfinete, e façamos a cópia girar sôbre o original, no sentido indicado pela seta, até que o ponto Q coincida com o ponto A.

Se o ponto P coincidir com o ponto B, teremos arco PQ = arco AB.

Se o ponto P coincidir com um ponto situado entre os pontos A e B, teremos arco PQ < arco AB.

Se o ponto P coincidir com um ponto situado aquem do ponto B, teremos arco PQ > arco AB.

E' evidente que dois arcos não poderão coincidir, se seus raios não forem iguais.

$$\text{H.}\ \begin{cases} MA = NC \\ \text{arco } AB = \text{arco } CD \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ \text{corda } AB = \text{corda } CD$$

Façamos a ○ de raio NC deslizar no plano da figura até que NC coincida com MA o que é possível porque NC=MA. (hip.) Os raios sendo iguais, as duas Ⓢ também coincidem. Sendo arco CD=arco AB (hip.) e coincidindo o ponto C com o ponto A, então o ponto D coincide com o ponto B. Nestas condições, a corda CD coincide com a corda AB, isto é, as cordas AB e CD são iguais.

TEOREMA CONTRÁRIO. ***Em uma circunferência ou em duas circunferências com raios iguais, arcos desiguais são subtendidos por cordas desiguais, e ao arco maior corresponde a corda maior.***

$$\text{H.}\ \begin{cases} MA = NC \\ \text{arco } AE > \text{arco } CD \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ \text{corda } AE > \text{corda } CD$$

Façamos a ○ de raio NC (fig. 85) deslizar no plano da figura até que NC coincida com MA, o que é possível porque NC=MA. (hip.) Os raios sendo iguais, as duas Ⓢ também coincidem. Sendo arco AE > arco CD, e coincidindo o ponto C com o ponto A, o ponto D não pode coincidir com o ponto E; coincidirá com um ponto B, situado no arco AE, entre os pontos A e E. Tracemos os raios MB e ME; estando o ponto B entre os pontos A e E, o raio MB ficará situado necessàriamente no interior do ∠ AME. Isto pôsto, comparemos os $\triangle$ AMB e AME.

$$\left.\begin{array}{l} MA = MA \\ MB = ME \\ A\hat{M}B < A\hat{M}E \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{Então } AB < AE.\ (\S 97)\ \text{Porém, } AB=CD. \\ \text{Logo, } CD < AE \text{ ou } AE > CD \end{array}$$

Exercícios. Enunciar as recíprocas dos dois últimos teoremas e demonstrá-las diretamente e pela redução ao absurdo.

Observação. Razão de dois números é o quociente da divisão dêstes dois números. A razão dos números a e b é $a \div b$ ou $a : b$ ou a/b. Se os números a e b são as medidas de dois segmentos, a expressão a/b significa quantas vêzes o segmento a contém o segmento b.

A RAZÃO DE DOIS ARCOS DESIGUAIS NÃO É IGUAL À RAZÃO DE SUAS CORDAS. Sejam os arcos AB e BE (fig. 85) e admitamos que êstes dois arcos são iguais; logo $\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AE} = \frac{1}{2}$. Calculemos agora a razão das cordas AB e AE que subtendem os arcos AB e AE, isto é, a razão $\frac{AB}{AE}$. Se os arcos AB e BE são iguais, suas cordas AB e BE também são iguais. Isto pôsto, no $\triangle$ ABE temos $AB+BE > AE \therefore 2AB > AE \therefore \frac{AB}{AE} > \frac{1}{2}$. Portanto se a razão dos arcos AB e AE é igual a ½, a razão de suas cordas é maior que ½.

QUARTO TEOREMA. ***Um diâmetro perpendicular a uma corda divide em duas partes iguais esta corda e os dois arcos que ela subtende.***

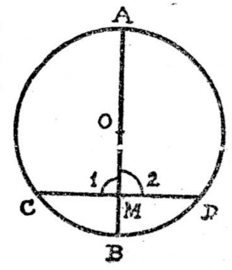


Fig. 86

H. { AB é um diâmetro ⊥ à corda CD.

$$\text{T.}\ \begin{cases} MC = MD \\ \text{arco } AC = \text{arco } AD \\ \text{arco } BC = \text{arco } BD \end{cases}$$

O diâmetro AB divide o plano da figura em dois semiplanos. Façamos o semiplano direito girar em tôrno de AB, até coincidir com o semiplano esquerdo. Sendo $\hat{1}=\hat{2}$ (hip.) o segmento MD coincide, em direção com o segmento MC, e o ponto D coincide com um ponto qualquer situado no segmento MC, ou no seu prolongamento. Mas o ponto D, estando situado na semicircunferência ADB, coincide também com um ponto qualquer situado na semicircunferência ACB. (§136, 1.º teorema) Logo, o ponto D coincide com o ponto C que é o único ponto comum às linhas MC e ACB. Donde resulta que MD=MC.

Os pontos A e B permanecendo imóveis, o arco AD coincide com o arco AC e o arco BD coincide com o arco BC. Então arco AD = arco AC e arco BD = arco BC.

Exercício. Demonstrar êste teorema sem fazer o semiplano direito girar em tôrno de AB.

RECÍPROCA. ***A perpendicular traçada pelo meio de uma corda passa pelo centro da circunferência.***

Seja CD (fig. 86) uma corda da ○ de centro O e raio OC. Pelo ponto M, meio de CD, tracemos uma ⊥ MO′ e admitamos que esta ⊥ não passe pelo centro da ○. Ora, pelo teorema direto,

se pelo centro da ○ traçarmos uma ⊥ à corda CD, esta ⊥ passará pelo ponto M, meio da corda CD. Teremos então duas ⊥s MO e MO′ a uma mesma reta CD, traçadas por um mesmo ponto M, o que é absurdo. (§ 83) Logo...

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIX.

137. A distância de uma corda ao centro. TEOREMA. ***Duas cordas iguais distam igualmente do centro.***

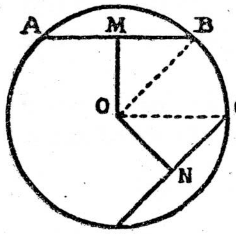


Fig. 87

H. { AB = CD T. { OM = ON

Consideremos as cordas iguais AB e CD. Tracemos os segmentos OM e ON, respectivamente ⊥s às cordas AB e CD. Os segmentos OM e ON serão então as distâncias do centro da ○ às cordas AB e CD. (§89 1.º teorema, observação) Tracemos os raios OB e OC, e comparemos os △s OMB e ONC.

AB = CD (hip.) ∴

$\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$ ∴

MB = NC (§139, 3.º teorema)
OB = OC
$O\hat{M}B = O\hat{N}C$ = 1 reto

Se os △s OMB e ONC são retângulos e têm a hipotenusa igual (OB = OC) e um cateto igual (MB = NC) então êstes dois △s são iguais. (§98, 1.º caso) Donde OM = = ON.

TEOREMA CONTRÁRIO. ***Duas cordas desiguais distam desigualmente do centro e a corda menor é a que está mais afastada do centro.***

H. { AB > CD
T. { OM < ON

Consideremos as cordas AB e CD, sendo AB > CD. (fig. 88) Tracemos os segmentos OM e ON, respectivamente ⊥s às cordas AB e CD. Os segmentos OM e ON serão então as distâncias do centro da ○ às cordas AB e CD. Sendo AB > CD, segue-se que arco AB > arco CD. Façamos o arco CD deslizar sobre a ○ e no sentido indicado pela seta, até que o ponto

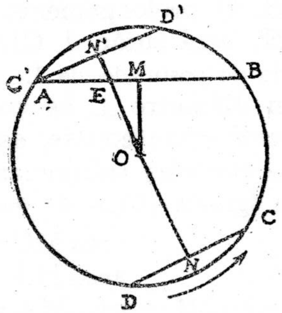


Fig. 88

C coincida com o ponto A. Sendo arco AB > arco CD, o ponto D coincidirá com um ponto da ○ *situado necessàriamente entre os pontos A e B*, e o arco CD tomará a posição C′D′. Tracemos a corda C′D′ e o segmento ON′ ⊥ C′D′. Desde que arco C′D′ = arco CD, então C′D′ = CD (§136, 3.º teorema) e ON = ON′. (§137, 1.º teorema)

Ora, OM < OE (OM sendo ⊥ AB, OE é oblíqua)
Mas, OE < ON′
Logo, OM < ON′ ∴ OM < ON

Exercício. Enunciar as recíprocas dêstes dois teoremas e demonstrá-las pela redução ao absurdo.

138. Traçar uma circunferência que passe por três pontos dados. TEOREMA. ***Por três pontos dados e não situados em linha reta é sempre possível traçar uma circunferência, e sòmente uma.***

Sejam A, B e C os três pontos dados e não situados em linha reta. Tracemos as mediatrizes dos segmentos AB e BC. Estas duas mediatrizes se encontram sempre. (axioma n.º 11 de Euclides) Seja O, o ponto de interseção; então o ponto O dista igualmente dos pontos A, B e C. (§121) Logo, fazendo centro no ponto O, e traçando uma ○ cujo raio seja OA, esta ○ passará necessàriamente pelos pontos B e C. Portanto, por três pontos dados e não situados em linha reta, é sempre possível traçar uma ○.

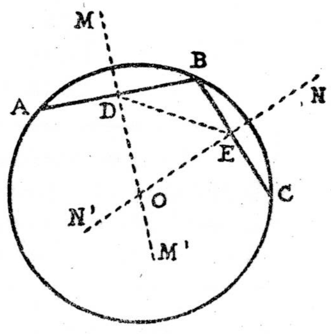


Fig. 89

Suponhamos que existe uma segunda ○ que passe pelos pontos A, B e C; o centro desta ○ será também o ponto O e o raio será OA; nestas condições ela coincidirá com a primeira.

Observações. Se os três pontos dados A, B e C estiverem em linha reta, as mediatrizes MM′ e NN′, sendo ⊥s a uma mesma reta ABC, serão ∥ (§ 10?) e encontrar-se-ão no infinito. Donde resulta que *a reta é uma ○ cujo centro está situado no infinito.* Esta definição da reta como limite da ○ nos permite compreender por que a superfície da Terra, sendo curva, nós temos a ilusão de que é plana.

Para determinar o centro de uma ○ ou de um arco, tomam-se três pontos quaisquer A, B e C (fig. 89); nesta ○ ou arco, traçam-se as cordas AB e BC, e as mediatrizes destas cordas; as duas mediatrizes se encontram em um ponto que é o centro procurado.

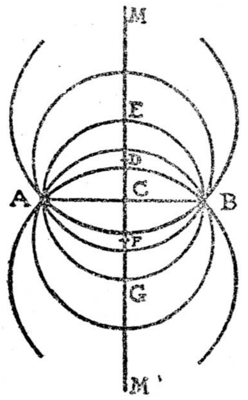


Fig. 90

Problema. Traçar uma ○ que passe por dois pontos dados.

Sejam A e B (fig. 90) os dois pontos dados. Tracemos a mediatriz MM′ do segmento AB. Qualquer ponto de MM′ dista igualmente dos pontos A e B. (§ 90) Portanto, tomando como centro qualquer dos pontos C, D, E, F, ... e como raios correspondentes os segmentos CA, DA, EA, FA, ..., todas as ⓢ traçadas passarão pelos pontos A e B. Donde se conclue que há uma infinidade de ⓢ que passam por dois pontos dados. E não havendo fora da mediatriz MM′, pontos eqüidistantes dos pontos dados A e B segue-se que:

O lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por dois pontos dados é a mediatriz do segmento retilíneo que liga os dois pontos dados.

Em resumo, por três pontos dados é sempre possível traçar uma ○, e sòmente uma. Por dois pontos dados podemos fazer passar uma infinidade de ⓢ: uma delas, e sòmente uma, passará pelo terceiro ponto dado fora do segmento que une os dois primeiros.

139. As propriedades da tangente. TEOREMA. ***Uma reta perpendicular a um raio e traçada pela extremidade dêste mesmo raio, é tangente à circunferência.***

H. { AB ⊥ OA.

T. { AB é tangente à ○.

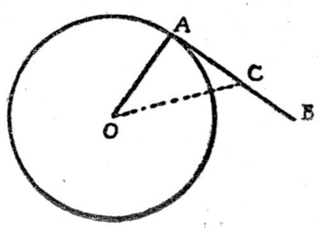


Fig. 91

A tang. a uma ○ é a reta que tem sòmente um ponto comum com a ○ (§ 135); os demais pontos da tang. são exteriores em relação à mesma ○. Portanto, para demonstrar que AB é tang. à ○, basta demonstrar que qualquer ponto de AB, excetuando o ponto A, por exemplo, o ponto C, é exterior à ○. Liguemos o centro da ○ ao ponto C. Sendo OA ⊥ AB, então OC é oblíqua à AB ∴ OA < OC. Sendo OA um raio e sendo OC > OA, o ponto C é um ponto exterior. Ora, se um ponto qualquer C da reta AB é exterior à ○, se o único ponto comum à reta AB e à ○ é o ponto A, então a reta AB é realmente tang. à ○.

RECÍPROCA. ***Uma tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.***

H. { AB é tangente à ○ de raio OA.   T. { AB ⊥ OA

Desde que AB é tang. à ○ de raio OA (fig. 91) no ponto A, segue-se que qualquer ponto da tang. AB, por exemplo, o ponto C, é exterior à ○ ∴ OA < OC. Ora, sendo OA menor do que qualquer outro segmento retilíneo que ligue o ponto O a qualquer ponto da reta AB, conclue-se que o segmento OA é a distância do ponto O à reta AB. Logo OA ⊥ AB.

140. Cordas paralelas. TEOREMA. ***Duas secantes paralelas interceptam, em uma circunferência, arcos iguais.***

H. { AB ∥ CD

T. { arco AC = arco BD

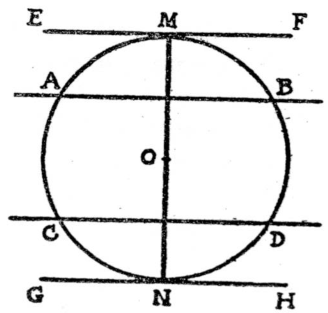


Fig 92

Tracemos o raio OM ⊥ à corda AB. O prolongamento de OM, isto é, ON, será então ⊥ CD. (§ 102, 3.º corolário do postulado de Euclides) Sendo MN um diâmetro ⊥ às cordas AB e CD, divide estas cordas, assim como os arcos que elas subtendem, em duas partes iguais. (§ 136, 4.º teorema) Logo,

arco MC = arco MD
arco MA = arco MB ∴
arco MC − arco MA = arco MD − arco MB ∴
arco AC = arco BD

PRIMEIRO COROLÁRIO. ***Uma tangente e uma secante paralelas interceptam, em uma circunferência, arcos iguais.***

Sejam AB e EF uma sec. e uma tang. $\parallel$. (fig. 92) Liguemos o centro da ○ ao ponto de contacto da tang. Sendo $OM \perp$ à tang. EF (§ 142) sê-lo-á também à sec. AB, porque $AB \parallel EF$. (§ 105, 3.º corolário do postulado de Euclides) E sendo $OM \perp AB$, então arco MA = arco MB. (§ 136, 4.º teorema)

SEGUNDO COROLÁRIO. ***Duas tangentes paralelas determinam em uma circunferência arcos iguais.***

Sejam EF e GH (fig. 92) duas tang. $\parallel$ e tracemos uma sec. qualquer $AB \parallel EF$. A sec. AB será também $\parallel$ GH. De acôrdo com o primeiro corolário, teremos:

$$\text{arco } MA = \text{arco } MB$$
$$\text{arco } NA = \text{arco } NB \quad \therefore$$
$$\text{arco } MA + \text{arco } NA = \text{arco } MB + \text{arco } NB \quad \therefore$$
$$\text{arco } MAN = \text{arco } MBN$$

Observação. Sendo arco MAN = arco MBN, cada um dêstes arcos é a metade da ○, donde se conclue que MN é um diâmetro. *O segmento retilíneo que liga os pontos de contacto de duas tangentes $\parallel$ é um diâmetro.*

141. Distância de um ponto a uma circunferência. A ○ é uma linha. Considerando uma ○ de centro O e raio OA (fig. 93) e um ponto qualquer M, exterior ou interior a esta mesma ○, *qual é o menor segmento retilíneo* que podemos traçar, ligando o ponto M a um ponto qualquer da ○? *E qual é o maior?* Em outras palavras, qual é a menor e a maior distância entre um ponto dado e uma ○ dada?

TEOREMA. ***A menor e a maior distância entre um ponto dado e uma circunferência dada são dois segmentos retilíneos situados na secante que passa pelo ponto dado e pelo centro da circunferência dada. A menor distância é o segmento que começa no ponto dado e termina no primeiro ponto de intersecção da secante com a circunferência; a maior distância é o segmento que começa no ponto dado e termina no segundo ponto de intersecção da secante com a circunferência.***

Há dois casos a considerar, porque o ponto M pode ser exterior ou interior.

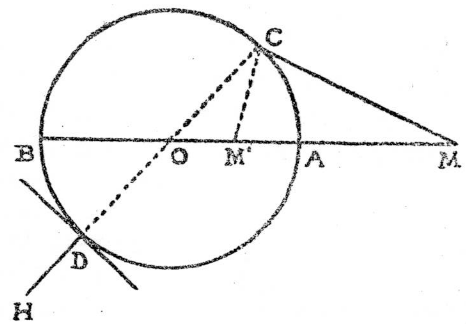


Fig. 93

1.º caso. O ponto M é exterior. Tracemos a sec. MAB; liguemos o ponto M a um ponto qualquer C da ○ e vamos provar que:

$$T. \begin{cases} MA < MC \\ MB > MC \end{cases}$$

Tracemos o raio OC. No $\triangle$ MOC temos:

1.º) $MO < MC + OC$
Sendo $MO = MA + OA$, então
$MA + OA < MC + OC$
Sendo $OA = OC$, resulta
$MA < MC$

2.º) $MC < MO + OC$
Sendo $OC = OB$, então
$MC < MO + OB \quad \therefore$
$MC < MB \quad \therefore$
$MB > MC$

2.º caso. O ponto M′ é interior. Tracemos o diâmetro AM′B; liguemos o ponto M′ a um ponto qualquer C da ○ e vamos provar que:

$$T. \begin{cases} M'A < M'C \\ M'B > M'C \end{cases}$$

Tracemos o raio OC. No $\triangle$ M′OC temos:

1.º) $M'C > OC - OM' \quad \therefore$
$M'C > OA - OM' \quad \therefore$
$M'C > M'A \quad \therefore$
$M'A < M'C$

2.º) $M'C < OC + OM' \quad \therefore$
$M'C < OB + OM' \quad \therefore$
$M'C < M'B \quad \therefore$
$M'B > M'C$

Dada uma curva qualquer MN, se traçarmos uma tang. a esta curva no ponto A, e uma $\perp$ a esta tang. no mesmo ponto A, a $\perp$ recebe o nome de *normal à curva no ponto A.*

No caso da ○ (fig. 93), se traçarmos uma tang. à curva no ponto D e uma $\perp$ HD à tang. no mesmo ponto D, esta $\perp$, sendo prolongada, passará pelo centro. Donde se conclue que *todas as normais a uma ○ passam pelo centro.*

Pelo ponto M (fig. 93) exterior à ○, tracemos as normais MA e MB; a primeira é a menor distância do ponto M à ○, e a segunda é a maior distância do ponto M à mesma ○.

Pelo ponto M′ (fig. 93) interior à ○, tracemos as normais M′A e M′B; a primeira é a menor distância do ponto M′ à ○, e a segunda é a maior distância do ponto M′ à mesma ○.

Problema. Dada uma ○ de centro O e raio $OA = r$, determinar um ponto situado a uma distância **d** desta ○.

Traça-se um raio qualquer OA. Neste raio, convenientemente prolongado, marcam-se dois segmentos AA′ e AA″ de modo que $AA' = AA'' = d$. Os pontos A′ e A″ são duas soluções do problema. E, considerando que o raio OA pode ser qualquer, conclue-se que o problema tem uma infinidade de soluções, isto é, há uma infinidade de pontos situados a uma distância dada de uma ○ dada.

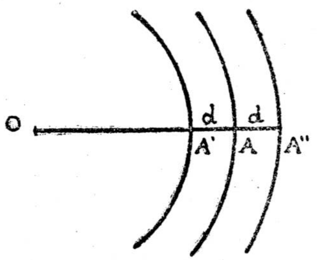


Fig. 94

O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância dada d, de uma circunferência de raio r, é constituído por duas circunferências concêntricas com a primeira e cujos raios respectivos são r + d e r − d.

Duas ou mais Ⓢ *são concêntricas quando têm o mesmo centro;* não tendo o mesmo centro são *excêntricas.*

Coroa *é a porção de superfície plana compreendida entre duas* Ⓢ *concêntricas.*

142. Circunferências secantes e tangentes. Duas Ⓢ que têm três pontos comuns coincidem. (§ 138) Por dois pontos dados A e B podemos traçar duas ou mais Ⓢ. (§ 138, problema, fig. 90) Logo, duas Ⓢ cujos raios são respectivamente OA e O′A (fig. 95) podem ter dois pontos comuns A e B. Quando duas Ⓢ têm dois pontos comuns, A e B, são chamadas *secantes.* Com efeito, elas se atravessam, *se cortam* mùtuamente nos pontos A e B. Ao segmento retilíneo que liga os centros das duas Ⓢ dá-se o nome de *linha dos centros;* a corda AB, sendo comum às duas Ⓢ, é chamada *corda comum;* os pontos A e B são chamados *pontos de intersecção das duas* Ⓢ.

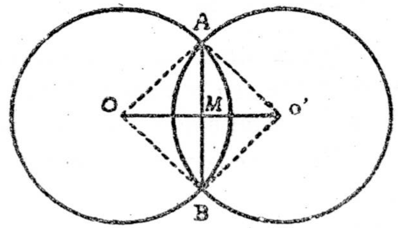


Fig. 95

TEOREMA. ***Quando duas circunferências distintas têm um ponto comum que não está situado na linha dos centros, têm um segundo ponto comum também situado fora da linha dos centros, e simétrico do primeiro em relação a esta mesma linha.***

Consideremos as Ⓢ cujos raios são OA e O′A. (fig. 95) Seja A um ponto comum às duas Ⓢ; tracemos AM ⊥ à linha dos centros OO′ e prolonguemos AM de um comprimento MB tal que $MB = MA$. Em seguida, liguemos os pontos O e O′ aos pontos A e B. Sendo OO′ ⊥ AB e sendo $MA = MB$, então OO′ é a mediatriz do segmento AB ∴ $OA = OB$ e $O'A = O'B$. Desde que $OA = OB$, a ○ de centro O e raio OA passa pelo ponto B; desde que $O'A = O'B$, a ○ de centro O′ e raio O′A também passa por B. Nestas condições o ponto B é comum às duas Ⓢ e não está situado na linha dos centros.

Corolários. I. *Os pontos A e B são simétricos em relação à linha dos centros.* (§ 116)

II. *Além dos pontos A e B, as duas* Ⓢ *não podem ter um terceiro ponto comum C, porque então coincidiriam e não seriam duas* Ⓢ *distintas.* (hip.)

III. *A linha dos centros é ⊥ à corda comum.*

TEOREMA. ***Quando duas circunferências distintas têm um ponto comum situado na linha dos centros, não têm nenhum outro ponto comum.***

Consideremos as Ⓢ cujos raios são OA e O′A e que têm um ponto comum A, situado na linha dos centros OO′. (fig. 96) Se além do ponto A, estas duas Ⓢ tivessem um segundo ponto comum B, *situado fora da linha dos centros,* então teriam um terceiro ponto comum B′, simétrico de B, em re-

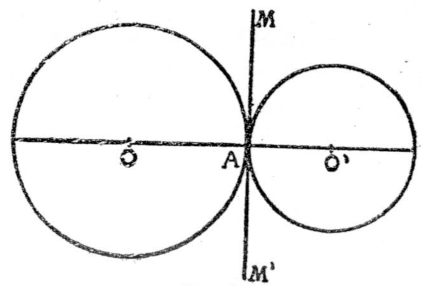


Fig. 96

lação à linha dos centros. Nesse caso, as duas Ⓢ coincidiriam, o que é contrário à hipótese. Logo...

Duas Ⓢ que têm sòmente um ponto comum são chamadas *tangentes*. O ponto comum é chamado *ponto de contacto*, e êste ponto está situado na linha dos centros.

Corolário. *Quando duas Ⓢ são tangentes, elas têm uma tangente comum no ponto de contacto.*

Com efeito, sendo MM' (fig. 96) $\perp$ aos raios OA e O'A, no ponto A, MM' é tangente às duas Ⓢ. (§ 139)

143. Posições mútuas de duas circunferências. Duas Ⓢ distintas podem apresentar cinco posições relativas.

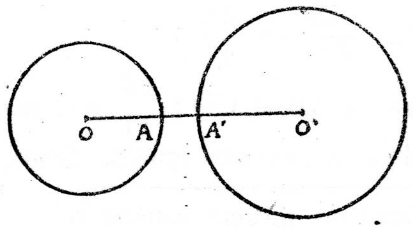


Fig. 97

1.ª posição. As duas Ⓢ são *exteriores*, isto é, todos os pontos de uma são exteriores em relação à outra, e recìprocamente. (fig. 97) *Quando duas Ⓢ são exteriores, a linha dos centros é maior do que a soma dos raios.* Com efeito, $OO' = OA + AA' + O'A' \therefore OO' > OA + O'A'$.

2.ª posição. As duas Ⓢ são *tangentes exteriormente*, isto é, sendo exteriores, têm um ponto comum. (fig. 98) *Quando duas Ⓢ são tangentes exteriormente, a linha dos centros é igual à soma dos raios.* Com efeito, estando o ponto de contacto situado na linha dos centros (§ 145), $OO' = OA + O'A'$.

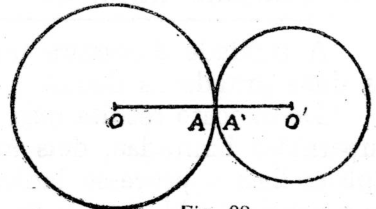


Fig. 98

3.ª posição. As duas Ⓢ são secantes. (fig. 99)

Quando duas Ⓢ são secantes, a linha dos centros é menor do que a soma dos raios e maior do que a diferença. Com efeito, ligando-se o ponto A ou A' aos dois centros, formaremos o $\triangle$ OAO' no qual $OO' < OA + O'A'$ ou $OO' > OA - O'A'$.

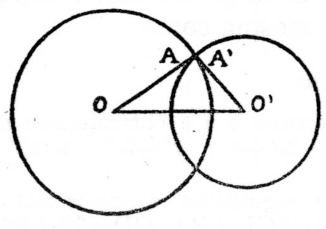


Fig. 99

4.ª posição. As duas Ⓢ são *tangentes interiormente*, isto é, sendo os pontos de uma interiores em relação à outra, elas têm um ponto comum. (fig. 100)

Quando duas Ⓢ são tangentes interiormente, a linha dos centros é igual à diferença dos raios. Com efeito, estando o ponto de contacto na linha dos centros, temos $OO' = OA - O'A'$.

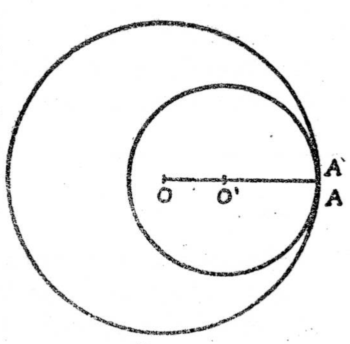


Fig. 100

5.ª posição. As duas Ⓢ são *interiores*, isto é, todos os pontos de uma são interiores em relação à outra. (fig. 101)

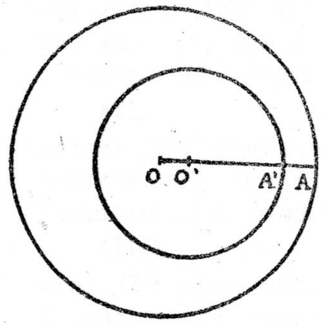


Fig. 101

Quando duas Ⓢ são interiores, a linha dos centros é menor do que a diferença dos raios. Com efeito, $OO' = OA - O'A' - AA'$. E somando AA' ao segundo membro desta igualdade teremos: $OO' < OA - O'A' - AA' + AA' \therefore OO' < OA - O'A'$.

Duas Ⓢ podem pois ocupar cinco posições distintas das quais resultam cinco relações diferentes entre a linha dos centros e os raios das duas Ⓢ. Estas cinco relações são os cinco teoremas que acabámos de demonstrar. Deixamos aos estudantes o cuidado de enunciarem as cinco recíprocas e demonstrá-las pela redução ao absurdo.

Recomendamos o terceiro teorema: para que duas Ⓢ se cortem é necessário que a linha dos centros seja menor do que a soma dos raios e maior do que a diferença.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIX.

144. Medida comum de duas grandezas da mesma espécie. *Medida comum de duas grandezas da mesma espécie é uma terceira grandeza da mesma espécie que as duas primeiras e que está contida em cada uma delas um número exato de vêzes.*

Consideremos dois segmentos retilíneos AB e CD. (fig. 102) São duas grandezas da mesma espécie. Vamos determinar a

sua medida comum, isto é, um terceiro segmento que esteja contido um número exato de vêzes em cada um dos segmentos AB e CD. Procederemos tal qual como em Aritmética, quando queremos determinar o m. d. c. de dois números.

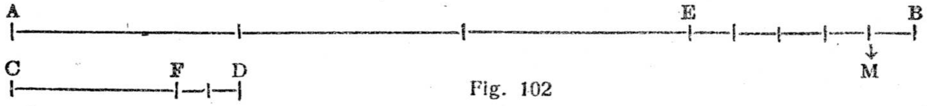


Fig. 102

Aplicamos o segmento menor CD sôbre o segmento maior AB, tantas vêzes quantas for possível. Admitindo que AB contém 3 vêzes o segmento CD, havendo um resto, o segmento EB, teremos :

$$AB = 3CD + EB \qquad (I)$$

Aplicamos o resto EB no segmento menor CD, tantas vêzes quantas for possível. Admitindo que CD contém uma vez o segmento EB, havendo um resto, o segmento FD, teremos :

$$CD = 1EB + FD \qquad (II)$$

Aplicamos o segundo resto FD no primeiro resto EB, tantas vêzes quantas for possível. Admitindo que EB contém 4 vêzes o segmento FD, havendo um resto, o segmento MB, teremos :

$$EB = 4FD + MB \qquad (III)$$

Aplicamos o terceiro resto MB no segundo resto FD, tantas vêzes quantas for possível. Admitindo que FD contém 2 vêzes o segmento MB, sem deixar resto, teremos :

$$FD = 2MB \qquad (IV)$$

Logo, MB é um segmento que está contido um número exato de vêzes em cada um dos segmentos AB e CD, e é o maior, como se pode demonstrar facilmente, relembrando todos os teoremas que constituem em Aritmética a teoria do m.d.c.

Vejamos agora quantas vêzes cada um dos segmentos AB e CD contém o segmento MB. Partindo da última igualdade (IV) teremos successivamente :

$$FD = 2MB$$
$$EB = 4FD + MB \therefore EB = 4\times 2MB + MB \therefore EB = 9MB$$
$$CD = 1EB + FD \therefore CD = 9MB + 2MB \therefore CD = 11MB$$
$$AB = 3CD + EB \therefore AB = 33MB + 9MB \therefore AB = 42MB$$

Portanto, o segmento MB está contido 11 vêzes no segmento CD, e 42 vêzes no segmento AB.

De um modo análogo se determinará a medida comum de dois $\measuredangle$, de dois arcos, de duas superfícies limitadas, etc..

Mas, nem sempre é completa a analogia com o problema aritmético ; em Aritmética, a operação termina forçosamente, ao passo que, em Geometria, ela pode se prolongar indefinidamente, sem que se chegue à medida comum, que talvez não exista. (§ 146)

145. Razão de duas grandezas da mesma espécie. São dadas duas grandezas da mesma espécie, por exemplo, dois segmentos retilíneos AB e CD. (fig. 102) Qual a razão dêstes dois segmentos? Vimos que a medida comum dos segmentos AB e CD é o segmento MB ; vimos mais que AB=42MB e CD= =11MB. Dividindo a primeira igualdade pela segunda, teremos :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{42\,MB}{11\,MB} \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{42}{11}$$

Ora, $\frac{AB}{CD}$ é a razão dos segmentos AB e CD ; $\frac{42}{11}$ é a razão dos números 42 e 11 ; estas duas razões são iguais. Logo,

> *A razão de duas grandezas da mesma espécie é igual à razão dos números que as representam,* **contanto que ambas sejam medidas com a mesma unidade.**

A unidade é sempre uma grandeza da mesma espécie que as duas grandezas dadas.

Do exposto resulta que, para comparar dois segmentos, duas superfícies limitadas, dois arcos, dois $\measuredangle$, etc., não é necessário aplicar-lhes o processo indicado no parágrafo 144, que é, aliás impraticável. Medem-se as duas grandezas dadas **com a mesma unidade** e, em lugar de comparar as duas grandezas, comparam-se os dois números obtidos, o que é a mesma cousa.

Exercícios em classe

1. Procurando-se a medida comum de dois arcos a e b obtiveram-se os seguintes resultados : $a=3b+r$; $b=5r+r'$; $r=2r'+r''$; $r'=4r''$. Qual é a razão dos arcos a e b?

2. Procurando-se a medida comum de dois segmentos retilíneos AB e CD, obtiveram-se os seguintes resultados : AB=2CD+R ; CD=3R+R' ;

$R = 4R' + R''$; $R' = 2R'' + R'''$; $R'' = 5R'''$. Qual é a razão dos segmentos AB e CD?

3. A razão de dois ∡ é 0,7. Qual é a medida comum dêstes dois ∡?

4. A razão de dois arcos é 24/18. Qual é a maior medida comum dêstes dois arcos?

146. Grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Duas grandezas da mesma espécie são comensuráveis quando têm medida comum; são incomensuráveis quando não têm medida comum. Refletindo sôbre o processo indicado para determinar a medida comum de duas grandezas da mesma espécie, temos a ilusão de que estas duas grandezas sempre são comensuráveis. Com efeito, desde que os restos vão diminuindo sucessivamente, chegará um momento em que o resto deixa de ser perceptível à nossa vista e somos levados a crer que êste resto, pela sua pequenez, deve caber nas duas grandezas um número exato de vêzes, e as duas grandezas são então comensuráveis. Entretanto, existem também grandezas incomensuráveis, como veremos mais tarde.

Sendo AB e CD duas grandezas da mesma espécie e incomensuráveis, não é possível determinar exatamente a sua razão; entretanto, podemos determinar esta razão, com êrro inferior a uma quantidade dada, por falta e por excesso, por exemplo com êrro inferior a 0,001.

Para melhor esclarecer êste assunto, suponhamos que CD foi dividido em 1 000 partes iguais, e que uma destas partes, a, coube 3 627 vêzes em AB, deixando um resto. Então,

$$\left\{\begin{array}{l} AB > 3\,627a \\ CD = 1\,000a \end{array}\right\} \quad \therefore \qquad \left\{\begin{array}{l} AB < 3\,628a \\ CD = 1\,000a \end{array}\right\} \quad \therefore$$

$$\frac{AB}{CD} > \frac{3\,627}{1\,000} \quad \therefore \qquad \frac{AB}{CD} < \frac{3\,628}{1\,000} \quad \therefore$$

$$\frac{AB}{CD} > 3{,}627 \qquad \frac{AB}{CD} < 3{,}628$$

$$3{,}627 < \frac{AB}{CD} < 3{,}628 \quad \therefore$$

$$\frac{AB}{CD} = 3{,}627 \quad \text{(com êrro inferior a 0,001 por falta)}$$

$$\frac{AB}{CD} = 3{,}628 \quad \text{(com êrro inferior a 0,001 por excesso)}$$

Resolvamos agora o mesmo problema, de um modo geral, isto é, determinando a razão dos segmentos AB e CD com êrro inferior a $\frac{1}{n}$.

Dividamos CD em n partes iguais e seja a uma destas partes. Suponhamos que a cabe em AB, m vêzes, deixando um resto, r, necessàriamente menor do que a. Então,

$$\left\{\begin{array}{l} AB > ma \\ CD = na \end{array}\right\} \quad \therefore \qquad \left\{\begin{array}{l} AB < (m+1)a \\ CD = na \end{array}\right\} \quad \therefore$$

$$\frac{AB}{CD} > \frac{ma}{na} \quad \therefore \qquad \frac{AB}{CD} < \frac{(m+1)a}{na} \quad \therefore$$

$$\frac{AB}{CD} > \frac{m}{n} \qquad \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}$$

Combinando as duas desigualdades finais, teremos:

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}.$$

A razão $\frac{AB}{CD}$ está compreendida entre as razões $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{m}{n}$; a diferença entre estas duas razões é $\frac{1}{n}$; então a diferença entre $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{AB}{CD}$ ou $\frac{m}{n}$ e $\frac{AB}{CD}$ é inferior a $\frac{1}{n}$.

Logo, $$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n} \quad \left(\text{com êrro inferior a } \frac{1}{n}, \text{ por falta}\right)$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m+1}{n} \quad \left(\text{com êrro inferior a } \frac{1}{n}, \text{ por excesso}\right)$$

147. O ângulo central. *Ângulo central é o ∠ cujo vértice está situado no centro de uma* ○. Os ∡ AMB e CND são centrais. (fig. 103)

TEOREMA. ***Em uma ○, ou em duas Ⓢ iguais, a ângulos centrais iguais correspondem arcos iguais.***

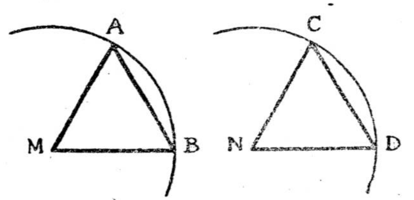


Fig. 103

$$\text{H.}\begin{cases}\hat{M} = \hat{N}\\ MB = ND\end{cases}$$

$$\text{T.}\ \{\ \text{arco } AB = \text{arco } CD$$

Tracemos as cordas AB e CD e comparemos os ⊿ AMB e CND. $\hat{M}=\hat{N}$ (hip.); MA = MB = NC = ND. Logo, △ AMB=△ CND (2.º caso) ∴ AB=CD. E sendo AB = CD ∴ arco AB = arco CD. (§ 136, recíproca do 3.º teorema)

Observação. Enunciar e demonstrar o teorema contrário e os recíprocos.

Dêste teorema, do teorema contrário e dos recíprocos, resulta que, quando o ∠ central aumenta, o arco compreendido entre seus lados também aumenta, e reciprocamente. Portanto, há uma relação entre os ∡ centrais e os arcos compreendidos entre seus lados, a qual está determinada no seguinte

TEOREMA. ***A razão de dois ângulos quaisquer é igual à razão dos arcos compreendidos entre seus lados, tendo como centros respectivos os vértices dos dois ângulos, e traçados com o mesmo raio, aliás arbitrário.***

Sejam os ∡ AMB e CND. (fig. 104) Fazendo centro nos vértices M e N, tracemos os arcos AB e CD; **o raio dêstes arcos pode ser qualquer; mas deve ser o mesmo para os dois arcos.**

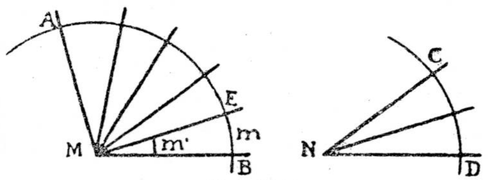


Fig. 104

Admitamos que os arcos AB e CD têm uma medida comum, isto é, um terceiro arco que está contido um número exato de vêzes em cada um dos arcos AB e CD, e seja BE ou **m** êste terceiro arco; supondo que o arco AB contenha 5 vêzes o arco *m* e o arco CD contenha 2 vêzes o mesmo arco **m**, teremos:

$$\begin{Bmatrix}\text{arco } AB = 5m\\ \text{arco } CD = 2m\end{Bmatrix} \therefore \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } CD} = \frac{5m}{2m} \therefore \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } CD} = \frac{5}{2} \quad \text{(I)}$$

Liguemos todos os pontos de divisão dos arcos AB e CD aos centros dêstes mesmos arcos, isto é, aos vértices M e N. Os

∡ M e N ficarão divididos respectivamente em 5 e 2 ∡, e êstes 7 ∡ serão todos iguais porque, em uma ○ ou em duas Ⓢ iguais, a arcos iguais correspondem ∡ centrais iguais. Um dêstes ∡, por exemplo, o ∠ BME ou *m'*, estando contido 5 vêzes no ∠ M e 2 vêzes no ∠ N, é uma medida comum dos ∡ M e N. Então,

$$\begin{Bmatrix}\hat{M} = 5m'\\ \hat{N} = 2m'\end{Bmatrix} \therefore \frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{5m'}{2m'} \therefore \frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{5}{2} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{De I e II deduzimos: } \frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } CD} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Observação. Suponhamos que os arcos AB e CD são incomensuráveis. Dividamos o arco CD em *n* partes iguais; sendo *a* uma destas partes, teremos

$$\textit{arco } CD = na$$

Se os arcos AB e CD são incomensuráveis, o arco *a* está contido *m* vêzes no arco AB, havendo um resto *r*, necessàriamente menor do que *a*; portanto,

$$\begin{Bmatrix}\textit{arco } AB > ma\\ \textit{arco } CD = na\end{Bmatrix} \therefore \qquad \begin{Bmatrix}\textit{arco } AB < (m+1)a\\ \textit{arco } CD = na\end{Bmatrix} \therefore$$

$$\frac{\textit{arco } AB}{\textit{arco } CD} > \frac{ma}{na} \therefore \qquad \frac{\textit{arco } AB}{\textit{arco } CD} < \frac{(m+1)a}{na} \therefore$$

$$\frac{\textit{arco } AB}{\textit{arco } CD} > \frac{m}{n} \quad (1) \qquad \frac{\textit{arco } AB}{\textit{arco } CD} < \frac{m+1}{n} \quad (2)$$

Combinado (1) e (2) (§ 146), teremos:

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } CD} = \frac{m}{n} \quad \text{(com êrro inferior a } \frac{1}{n}\text{, por falta)}$$

Unamos todos os pontos de divisão dos arcos AB e CD, aos respectivos centros. O ∠ N ficará dividido em *n* ∡ iguais. E sendo *a'* um dêstes ∡ teremos:

$$\hat{N} = na'$$

Quanto ao ∠ M, êste ∠ conterá *m* vêzes o ∠ *a'*, havendo um resto *r'*, necessàriamente menor do que *a'*; portanto, raciocinando como fizemos em relação aos arcos, teremos

$$\frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{m}{n} \quad \text{(com êrro inferior a } \frac{1}{n}\text{, por falta)}$$

$$\text{Em resumo:}\begin{cases}\dfrac{\text{arco } AB}{\text{arco } CD} = \dfrac{m}{n} \quad \text{(com êrro inferior a } \dfrac{1}{n}\text{, por falta)}\\[2ex] \dfrac{A\hat{M}B}{C\hat{N}D} = \dfrac{m}{n} \quad \text{(com êrro inferior a } \dfrac{1}{n}\text{, por falta)}\end{cases}$$

Portanto, a razão aproximada, com êrro inferior a $\frac{1}{n}$, por falta, dos arcos AB e CD, assim como dos ∡ AMB e CND, é a mesma, isto é, $\frac{m}{n}$.

A unidade para avaliar ∡, a unidade que se apresenta em primeiro lugar, é o ∠ reto. (§ 84) A unidade para avaliar arcos deve ser um arco ; o arco tomado como unidade pode ser qualquer ; o décimo da ○, o centésimo, o milésimo, etc.. Mas, se o ∠ central varia com o arco compreendido entre seus lados, e recìprocamente, surge desde logo esta questão : um ∠ central sendo reto, o arco compreendido entre seus lados que fração é da ○? E' o que vamos determinar.

Em uma ○ qualquer (fig. 105) tracemos dois diâmetros ⊥s AB e CD. Formaremos assim 4 ∡ retos AOC, COB, BOD e DOA. Êstes quatro ∡ sendo retos, são iguais ; e sendo centrais, os arcos compreendidos entre seus lados, isto é, os arcos AC, CB, BD e DA, são iguais. Nestas condições, um dêstes arcos, por exemplo, o arco AC, é a *quarta parte da* ○, recebendo, por êste motivo, o nome de **quadrante**. E concluímos que um ∠ sendo reto, o arco compreendido entre seus lados e tendo como centro o vértice dêste mesmo ∠, é um quadrante.

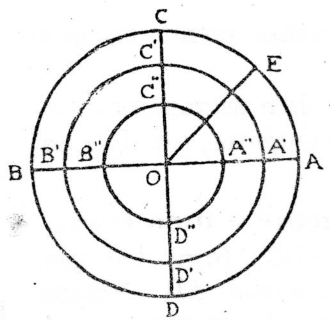


Fig. 105

Quanto ao raio da ○ (fig. 105) pode ser qualquer; é o que a figura mostra claramente. Sejam AB e CD ou A'B' e C'D', os dois diâmetros ⊥s; os quatro ∡ centrais são sempre iguais, e o arco A'C' é também um quadrante como o arco AC.

Tomando-se o ∠ reto como unidade para avaliar ∡, é conveniente tomar o quadrante para avaliar arcos. Esta conveniência resulta do seguinte

TEOREMA. ***Tomando o ângulo reto como unidade de ângulo, e o quadrante como unidade de arco, o número que mede um ângulo qualquer é igual ao número que mede o arco compreendido entre seus lados, tendo por centro o vértice dêste mesmo ângulo.***

Consideremos o ∠ AOE. (fig. 105) De acôrdo com o teorema anterior,

$$\frac{\hat{AOE}}{\hat{AOC}} = \frac{\text{arco AE}}{\text{arco AC}} \quad \therefore \quad \frac{\hat{AOE}}{\text{um} \angle \text{reto}} = \frac{\text{arco AE}}{\text{um quadrante}}$$

O primeiro membro desta igualdade exprime quantas vêzes o ∠ AOE contém a unidade de ângulo ; é portanto um número. (§ 84) O segundo membro da mesma igualdade exprime quantas vêzes o arco AE contém a unidade de arco ; é também um número. E êstes dois números são iguais.

Observação. E' hábito dizermos : *o ∠ A tem por medida o arco compreendido entre seus lados.* E' um êrro. Entretanto, esta expressão é admitida, desde que se compreenda bem o seu verdadeiro significado, a saber : o número que mede o ∠ A é igual ao número que mede o arco compreendido entre seus lados, *quando a unidade angular é o ∠ reto, e a unidade de arco é o quadrante,* ou, de um modo mais geral quando, tomando um ângulo central como unidade angular, *a unidade de arco é o arco interceptado pelos lados dêste mesmo ângulo, na* ○ *cujo centro é o vértice do ângulo.*

Quando dizemos que o ∠ A tem 42°, não nos exprimimos bem. Deveríamos dizer que o ∠ A é igual a 42/90 do ∠ reto. E' o arco compreendido entre os lados do ∠ A que tem 42°. Mas, desde que o número que mede o ∠, $\left(\frac{42}{90}\right.$ do ∠ reto$\left.\right)$ é igual ao número que mede o arco, $\left(\frac{42}{90}\right.$ do quadrante$\left.\right)$ nós dizemos, indiferentemente, que o ∠ ou o arco tem 42°.

De tudo o que dissemos neste parágrafo resulta :

> **O ângulo central tem por medida o arco compreendido entre seus lados.**

148. O ângulo inscrito. Pelo ponto A, situado na ○ de centro O, tracemos duas secantes que cortem a mesma ○ respectivamente nos pontos E e D; o ∠ EAD é chamado *ângulo inscrito.* (fig. 106) Os ∡ EAB, EAC, BAD, CAD são ∡ inscritos.

TEOREMA. ***O ângulo inscrito tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.***

Na demonstração devemos considerar três casos distintos.

1.° caso. *Um dos lados do ∠ inscrito passa pelo centro da* ○.

Consideremos o ∠ BAC, cujo lado AC passa pelo centro. Traçando o raio OB formaremos o △ AOB, isósceles, porque

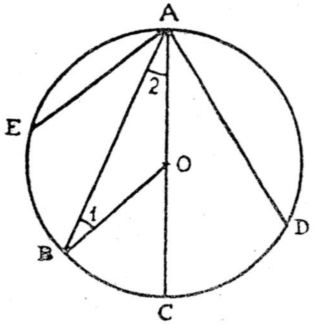


Fig. 106

OA=OB como raios de uma mesma ○; donde $\hat{1}=\hat{2}$. O ∠ BOC, sendo externo, em relação ao △ AOB, resulta que $B\hat{O}C=\hat{1}+\hat{2}$. (§ 109, II) E sendo $\hat{1}=\hat{2}$, então

$$B\hat{O}C=2\times\hat{2} \quad .\,\dot{}\,. \quad \hat{2}=\frac{B\hat{O}C}{2}$$

Mas o ∠ BOC, sendo central, tem por medida o arco BC; logo o ∠ 2, sendo igual à metade do ∠ BOC, terá por medida a metade do arco BC. Se o arco BC tiver, por exemplo, 48°, o ∠ 2 (BAC) terá 24°. (24 nonagésimos de um ∠ reto)

2.° caso. *O centro da ○ fica no interior do ∠.*

Consideremos o ∠ BAD. (fig. 106) Tracemos o diâmetro AC. De acôrdo com o 1.° caso, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco BC}}{2} \\ C\hat{A}D \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco CD}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} .\,\dot{}\,. \ (B\hat{A}C + C\hat{A}D) \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco BC + arco CD}}{2} \\ B\hat{A}D \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco BD}}{2} \end{array}$$

3.° caso. *O centro da ○ fica no exterior do ∠.*

Consideremos o ∠ BAE. Tracemos o diâmetro AC. De acôrdo com o 1.° caso, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} E\hat{A}C \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco EC}}{2} \\ B\hat{A}C \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco BC}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} .\,\dot{}\,. \ (E\hat{A}C - B\hat{A}C) \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco EC − arco BC}}{2} \\ B\hat{A}E \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco BE}}{2} \end{array}$$

149. Segmento circular. Uma corda qualquer divide um círculo (superfície circular) em duas porções chamadas *segmentos circulares*. Portanto, *segmento circular é a porção de círculo limitada por uma corda e pelo arco que ela subtende.* A uma corda AB (fig. 107) correspondem sempre dois segmentos circulares, em geral desiguais. Se a corda é um diâmetro, os dois segmentos

são iguais; são semicírculos. Um ∠ está inscrito em um segmento, quando seu vértice está no arco do segmento e seus lados passam pelas extremidades da corda do segmento. Os ∡ ACB, ADB e AEB estão inscritos em um mesmo segmento. Do teorema anterior (§ 148) resultam os seguintes corolários, cuja demonstração deixamos aos estudantes.

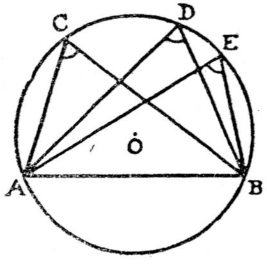


Fig. 107

I. Todos os ∡ inscritos em um mesmo segmento são iguais.

II. Um ∠ inscrito em um semicírculo é reto.

III. Todos os ∡ inscritos em um segmento maior do que um semicírculo são agudos.

IV. Todos os ∡ inscritos em um segmento menor do que um semicírculo são obtusos.

V. Uma corda divide um círculo em dois segmentos; se inscrevermos um ∠ em cada um dêstes segmentos, os dois ∡ serão supls.

150. Ângulo formado por uma tangente e uma corda.

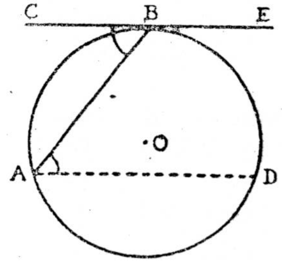


Fig. 108

Consideremos o ∠ ABC, formado pela tangente BC, e pela corda AB. Vamos demonstrar que êste ∠ tem por medida a metade do arco AB subtendido pela corda AB. Tracemos a corda AD ∥ BC. Então arco AB=arco BD (§ 140, primeiro corolário) e $A\hat{B}C = B\hat{A}D$. (alt.-int. formados pelas ∥ AD e BC, etc..) Mas $B\hat{A}D$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco BD}}{2}$ ou $\dfrac{\text{arco AB}}{2}$. Logo, ∠ ABC também terá por medida a metade do arco AB.

Observação. Na demonstração dêste teorema, considera-se sempre o ∠ ABC porque, em relação a uma corda qualquer AB, o arco maior que ela subtende é sempre pôsto à margem. Entretanto, o ∠ ABE é também formado por uma tangente e por uma corda, tendo por medida a metade do arco ADB, como é fácil provar.

151. Ângulos formados por secantes e tangentes. Em uma ○ qualquer traçam-se duas cordas ou secantes AB e CD. (fig. 109) Formam-se quatro ∡, o. p. v., dois a dois.

TEOREMA. ***O ângulo formado por duas cordas ou secantes que se cortam no interior de uma circunferência, tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados, mais a metade do arco compreendido entre os lados do ângulo que lhe é oposto pelo vértice.***

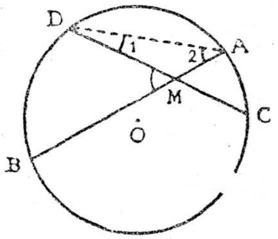


Fig. 109

Considerando um dos quatro ∡ cujo vértice é o ponto M, por exemplo o ∠ BMD, é necessário demonstrar que êste ∠ tem por medida a semissoma dos arcos BD e AC.

Traçamos a corda AD, formando o △ AMD. Em relação a êste △, o ∠ BMD é um ∠ externo ; logo,

$$B\hat{M}D = \hat{1} + \hat{2} \quad (\S 109,\ 2.^o \text{ corolário})$$

Mas, $\hat{1}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco AC}}{2}$ e $\hat{2}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco BD}}{2}$ (§ 151)

Donde resulta que $B\hat{M}D$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco AC} + \text{arco BD}}{2}$.

TEOREMA. ***O ângulo formado por duas secantes que se cortam em um ponto exterior a uma circunferência, tem por medida a semidiferença dos arcos que seus lados interceptam na mesma circunferência.***

Consideremos o ∠ A formado pelas secantes ABC e ADE ; vamos demonstrar que êste ∠ tem por medida a semidiferença dos arcos CE e BD. Traçamos a corda EB, formando o △ EBA. Em relação a êste △, o ∠ 1 é um ∠ externo ; então $\hat{1} = \hat{2} + \hat{A}$ $\therefore$ $\hat{A} = \hat{1} - \hat{2}$.

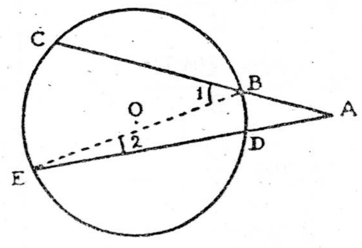


Fig. 110

Mas, $\hat{1}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco CE}}{2}$ e $\hat{2}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco BD}}{2}$. (§ 148)

Donde resulta que $\hat{A}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco CE} - \text{arco BD}}{2}$.

COROLÁRIO. ***O ângulo formado por uma tangente e uma secante qualquer tem por medida a semidiferença dos arcos que seus lados interceptam na mesma circunferência.***

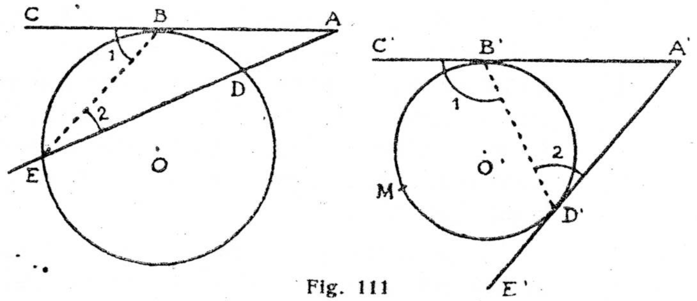


Fig. 111

Consideremos o ∠ A ; êste ∠ tem por medida a semidiferença dos arcos BE e BD. Tracemos a corda EB, formando o △ EBA. Em relação a êste △, o ∠ 1 é um ∠ externo ; logo,

$$\hat{1} = \hat{2} + \hat{A} \ \therefore\ \hat{A} = \hat{1} - \hat{2}$$

Mas, $\hat{1}$ t.p.m. $\dfrac{\text{arco BE}}{2}$ (§ 150) e $\hat{2}$ t.p.m. $\dfrac{\text{arco BD}}{2}$. (§ 148)

Logo, $\hat{A}$ t.p.m. $\dfrac{\text{arco BE} - \text{arco BD}}{2}$.

Observação. O ∠ formado por duas tangentes A'B'C' e A'D'E' a uma mesma ○ (fig. 111) t. p. m. a semidiferença dos arcos compreendidos entre seus lados, isto é, $\dfrac{\text{arco B'MD'} - \text{arco B'D'}}{2}$, como é fácil de demonstrar.

152. Segmento capaz. Os ∡ ACB, ADB e AEB (fig. 107) inscritos em um mesmo segmento, são iguais porque têm a mesma medida, isto é, a metade do arco AB. Se o ∠ ACB tem 48°, todos os ∡ inscritos no mesmo segmento têm também 48°. Dizemos em Geometria que *o segmento é capaz de um ∠ de 48°*.

Segmento capaz de um ∠ dado é um segmento tal que todos os ∡ nele inscritos são iguais ao ∠ dado.

Existe sempre um segmento capaz de um ∠ dado, isto é, dado um ∠, podemos construir um segmento tal que os ∡ nele inscritos sejam iguais ao ângulo dado. (§ 158)

Suponhamos um observador colocado no ponto C do arco ACB. (fig. 112) Se êle visar o ponto A e depois o ponto B, as duas visadas formarão um $\angle$ ACB que tem por medida a metade do arco AB. Dizemos em Geometria que o observador, colocado no ponto C, ***vê a corda** AB **ou o segmento retilíneo** AB **sob o** $\angle$ ACB.*

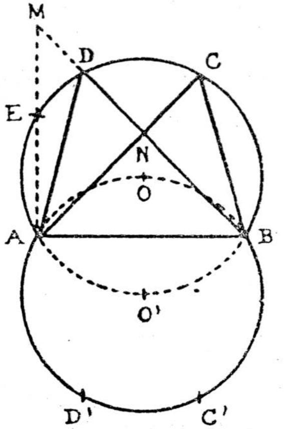


Fig. 112

Dado um segmento retilíneo AB, existirá no plano onde está o segmento, um ponto de onde se veja o segmento AB sob um $\angle$ dado? E existirá apenas um ponto ou muitos pontos? Neste último caso, onde estão êles situados? Qual é o seu lugar geométrico?

Seja C um ponto de onde se vê o segmento AB sob um $\angle$ dado ACB. Pelos pontos A, B e C façamos passar uma ○. A corda AB divide esta ○ e o círculo em dois segmentos, e todos os $\measuredangle$ inscritos no segmento maior são iguais ao $\angle$ ACB. Portanto, há uma infinidade de pontos de onde se vê o segmento AB sob um $\angle$ dado, e êstes pontos estão situados no arco ADCB. Procuremos fora dêste arco, pontos de onde se veja o segmento AB sob o $\angle$ ACB. Considerando o ponto exterior M, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C} \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco AB}}{2} \\[2ex] \hat{M} \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco AB}}{2} - \dfrac{\text{arco DE}}{2} \ (\S 151) \end{array}\right\} \therefore \hat{M} < \hat{C}$$

Considerando o ponto interior N, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C} \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco AB}}{2} \\[2ex] \hat{N} \text{ t. p. m. } \dfrac{\text{arco AB}}{2} + \dfrac{\text{arco CD}}{2} \ (\S 151) \end{array}\right\} \therefore \hat{N} > \hat{C}$$

Donde se conclue que, seja qual for o ponto escolhido no arco AEDCB, veremos sempre o segmento AB sob um $\angle$ dado ACB, ao passo que, se nos colocarmos no exterior ou no interior

da ○, veremos o segmento AB sob um $\angle$ M, menor do que o $\angle$ C, ou um $\angle$ N, maior do que o $\angle$ C. Portanto,

> **O lugar geométrico dos pontos de onde se vê um segmento dado sob um $\angle$ dado, é um arco do qual o segmento dado é corda.**

Construindo o arco simétrico do arco AEDCB, em relação à corda AB (§ 116), isto é, o arco AD'C'B (fig. 112) e se nos colocarmos em qualquer ponto dêste arco, a corda AB será vista também sob o mesmo $\angle$ ACB ou $\angle$ AC'B. Portanto, o lugar geométrico em questão se compõe, na realidade, de dois arcos simétricos em relação ao segmento AB. (§ 158)

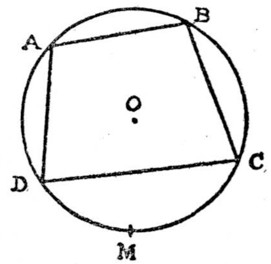


Fig. 113

153. O quadrilátero inscrito. Um quadrilátero ABCD está *inscrito* em uma ○ quando seus vértices estão situados na ○; então seus lados são cordas da mesma ○, *e a ○ está circunscrita ao quadrilátero.*

TEOREMA. ***Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito são suplementares.***

H. $\left\{\begin{array}{l}\text{O quadrilátero ABCD está} \\ \text{inscrito em uma ○.}\end{array}\right.$ T. $\left\{\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{C} = 2 \text{ retos} \\ \hat{B}+\hat{D} = 2 \text{ retos}\end{array}\right.$

$\hat{A}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco BCD}}{2}$

$\hat{C}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco BAD}}{2}$ $\therefore$

$\hat{A} + \hat{C}$ t. p. m. $\dfrac{○}{2}$ $\therefore$

$\hat{A} + \hat{C} = 2$ retos.

$\hat{B}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco ADC}}{2}$

$\hat{D}$ t. p. m. $\dfrac{\text{arco ABC}}{2}$ $\therefore$

$\hat{B} + \hat{D}$ t. p. m. $\dfrac{○}{2}$ $\therefore$

$\hat{B} + \hat{D} = 2$ retos.

RECÍPROCA. ***Se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, êste quadrilátero é inscritível.***

H. $\begin{cases} \hat{A}+\hat{C} = 2 \text{ retos.} \\ \hat{B}+\hat{D} = 2 \text{ retos.} \end{cases}$ T. $\begin{cases} \text{O quadrilátero ABCD} \\ \text{é inscritível.} \end{cases}$

Pelos vértices A, B e C façamos passar uma ○ ABCMA. O ∠ D, sendo suplemento do ∠ B, tem por medida a metade do arco ABC. Então o vértice do ∠ D está situado no arco AMC porque é sòmente neste arco que existem pontos de onde se vê a corda AC sob um ∠que tenha por medida a metade do arco ABC.

Observação. O ▱ e o losango não podem ser inscritos em uma ○; o mesmo acontece com um trapézio qualquer. O retângulo, o trapézio simétrico e o quadrado são inscritíveis.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série L.

Capítulo IX

Construções Geométricas

154. Definições e métodos. *Problema gráfico* ou *de construção*, é o problema no qual se pede a *construção*, o *desenho* de uma figura que satisfaça a certas e determinadas condições.

As condições impostas pelo problema são chamadas *dados*, os quais consistem na *grandeza* e na *posição* dos elementos geométricos com os quais devemos resolver o problema proposto.

A solução do problema é a figura obtida, e que satisfaz às condições impostas pelo mesmo problema.

Nos problemas gráficos de Geometria Elementar, as linhas empregadas são a reta e a ○; portanto, *os instrumentos fundamentais para a resolução dêstes problemas são a régua e o compasso.*

Quanto aos métodos empregados para resolver problemas gráficos, são apenas dois : o *sintético* e o *analítico*.

Quando vemos imediatamente como resolver o problema, fazemos a construção e justificamos o resultado, isto é, provamos que ela está de acôrdo com as condições impostas pelo problema ; *êste é o metodo sintético.*

Quando não vemos de pronto como resolver o problema, imaginamo-lo resolvido, isto é, desenhamos uma figura mais ou menos nas condições que o problema lhe impõe ; depois estudamos esta figura, *analisamo-la*, para que possamos descobrir o caminho que nos permitirá resolver o problema ; *êste é o método analítico.*

155. Traçado do hexágono regular inscrito. Um polígono ABCDEFA está inscrito em uma ○ quando seus vértices estão situados nesta ○ ; então seus lados são cordas. Quanto à ○, dizemos que ela é ou está circunscrita ao polígono.

Vejamos como se constrói um hexágono regular inscrito.

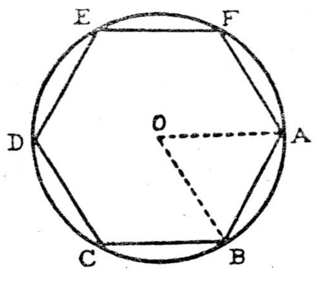


Fig. 114

Suponhamos o problema resolvido (§154, método analítico) e seja ABCDEFA um hexágono regular inscrito na ○. Tracemos os raios OA e OB. Se o hexágono é regular, seus lados são iguais, a saber, $AB = BC = CD = DE = EF = FA$. Donde resulta que os arcos AB, BC, CD, DE, EF e FA são iguais. (§136) Nestas condições, cada um dêstes arcos, por exemplo, o arco AB é *um sexto* da ○, medindo, portanto, 60°, e o $\angle$ central AOB, tendo por medida o arco AB, (§147) é um $\angle$ de 60°.

Isto pôsto, analisemos o $\triangle$ AOB. Sendo $OA = OB$ como raios de um mesmo círculo, o $\triangle$ AOB é isósceles, donde $O\hat{A}B = O\hat{B}A$. (§94) Sendo a soma dos três $\measuredangle$ de um $\triangle$ igual a dois retos ou 180°, se o $\angle$ AOB tem 60°, os $\measuredangle$ OAB e OBA medem juntos 120°. Mas êstes dois $\measuredangle$ são iguais; logo, cada um dem juntos 120°. Mas êstes dois $\measuredangle$ são iguais; logo, cada um dêles mede 60°. Nestas condições, os três $\measuredangle$ do $\triangle$ são iguais, o $\triangle$ é *equiângulo* e, portanto, *equilátero*. (§94, corolário) Donde resulta que $OA = AB$, isto é:

O lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é igual ao ráio da mesma circunferência.

Construção. Para traçar um hexágono regular inscrito em uma ○ dada, é bastante inscrever nesta ○ cordas consecutivas iguais ao raio.

Observação. **Escolhemos êste problema para iniciar a série dos problemas gráficos, pelas suas numerosas aplicações.**

156. Traçado de perpendiculares. *Problema I*. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

Êste problema já foi resolvido. (§91, 1.° exercício) Convém acrescentar que o raio AM igual ao raio BM, deve ser maior que a metade do segmento AB. Com efeito, para que as duas Ⓢ se cortem, é necessário que $AB < AM + BM$. (§143, 3.ª posição)

Problema II. Traçar uma $\perp$ a um segmento dado e que passe pelo centro do mesmo segmento. (§91, 2.° exercício)

Problema III. Dividir um segmento retilíneo em duas partes iguais. (§91, 3.° exercício)

Problema IV. Dividir um segmento retilíneo em 2, 4, 8, 16, 32, etc., partes iguais, isto é, em 2^n partes iguais.

Problema V. Traçar uma $\perp$ a uma reta dada, por um ponto dado nesta mesma reta. (§91, 5.° exercício)

Problema VI. Traçar uma $\perp$ a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta.

Já foi resolvido. (§91, 7.° exercício) Convém acrescentar que, depois de traçado o arco MN (fig. 31) a mediatriz do segmento MN passará pelo ponto C. (§136, 4.° teorema, recíproca)

Problema VII. Traçar uma $\perp$ a uma semirreta AX, pelo ponto A.

Primeiro processo. Traça-se a semirreta AY oposta à semirreta AX. A' direita e à esquerda do ponto A tomam-se na reta XY dois segmentos iguais AB e AC. Em seguida, traça-se a mediatriz do segmento BC.

Segundo processo. Às vêzes não é possível prolongar a semirreta AX. (fig. 115) Escolhe-se um ponto qualquer M do plano e com o raio MA traça-se uma ○ que corte a semirreta AX num ponto B. Traça-se o diâmetro BC e liga-se o ponto C ao ponto A. A reta AC será $\perp$ à semirreta AX. Com efeito, o $\angle$ A, inscrito em um semicírculo, é um $\angle$ reto; (§149, 2.° corolário) donde $AC \perp AX$.

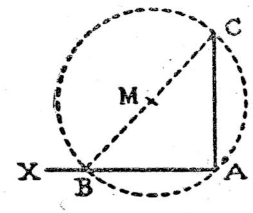


Fig. 115

Terceiro processo. Fazendo-se centro no ponto A e com um raio qualquer, traça-se a semicircunferência BY. (fig. 116) *Com o mesmo raio* AB inscrevem-se nesta ○ as duas cordas consecutivas BC e CD. Então cada um dos arcos BC e CD tem 60°. (§155) Se traçarmos a mediatriz do segmento CD, esta passará pelo centro A, do arco BCDY (§136, 4.° teorema, recíproca) e dividirá o arco CD em duas par-

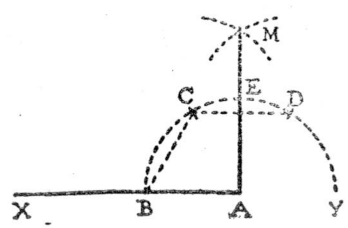


Fig. 116

tes iguais (§136, 4.° teorema); donde arco CE=arco ED. Tracemos então a mediatriz MA, do segmento CD, e consideremos o $\angle$ MAX. Êste $\angle$ é central em relação à $\bigcirc$ BCDY. Logo, tem por medida o arco BE. (§147) Ora:

$$\text{arco BE} = \text{arco BC} + \text{arco CE} \quad \therefore$$

$$\text{arco BE} = \text{arco BC} + \frac{\text{arco CD}}{2} \quad \therefore$$

$$\text{arco BE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ \therefore \text{MA} \perp \text{AX}$$

Este processo é o mais rápido na prática; não é necessário traçar as cordas BC e CD; escolhe-se um raio qualquer AB, e depois:

1.° tempo: traça-se o arco BY;

2.° tempo: centrando em B, marca-se o ponto C;

3.° tempo: centrando em C, marca-se o ponto D e traça-se um dos arcos que vai determinar o ponto M;

4.° tempo: centrando em D, traça-se o segundo arco que vai determinar o ponto M.

157. Construção de ângulos. *Problema I.* E' dado o $\angle$ ABC e pede-se um $\angle$ igual. Traça-se uma semirreta ED. Fazendo centro nos pontos B e E, *com o mesmo raio*, traçam-se os arcos MN e M'X. Em seguida, marca-se no arco M'X um ponto N' tal que arco MN= arco M'N'. Unindo-se o ponto E ao ponto N', o $\angle$ DEF será igual ao $\angle$ ABC. (§147, recíproca do 1.° teorema)

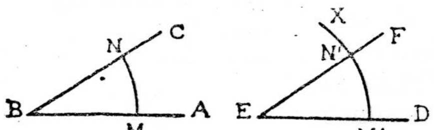


Fig. 117

Problema II. Traçar a bissetriz de um $\angle$ dado, ou dividir um $\angle$ dado em duas partes iguais.

Seja AOB (fig. 128) o $\angle$ dado. Fazendo centro no vértice do $\angle$ e com um raio qualquer, traça-se o arco MN. Em seguida, traça-se a corda MN e uma $\perp$ a esta corda e que passe pelo centro da mesma. Esta $\perp$ passa pelo vértice do $\angle$ e divide a corda e o arco em duas partes iguais. (§136) Os $\measuredangle$ centrais MOC e NOC têm por medida os arcos MC e NC (§147); se

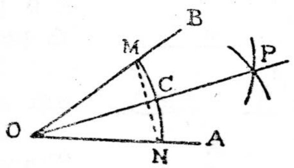


Fig. 118

os dois arcos são iguais, os dois $\measuredangle$ são também iguais e OP é realmente a bissetriz do $\angle$ AOB.

Na prática é inútil traçar o arco MN e a corda MN; é bastante marcar os pontos M e N de modo que OM=ON e, depois, determinar um ponto P eqüidistante dos pontos M e N.

Problema III. Dividir um $\angle$ dado em 2, 4, 8, 16, 32, etc., partes iguais, isto é, em 2^n partes iguais.

Observação. Demonstra-se que não é possível resolver o problema da *trisecção* de um $\angle$ qualquer, sòmente com a régua e o compasso. *Trisecção* de um $\angle$ significa divisão em três partes iguais.

Problema IV. Construção de um $\angle$ de 90°, 60°, 30°, 15°, 45°, 135°, 150°, etc..

Traça-se uma reta qualquer AB, e uma semirreta CD $\perp$ AB; os $\measuredangle$ ACD e BCD são retos e têm, portanto, 90° cada um.

Com centro em C e raio qualquer traça-se o arco MN. Fazendo centro no ponto M, *e com o mesmo raio*, determina-se o ponto E. O arco ME tem 60° (§158); portanto o $\angle$ central MCE tem 60°.

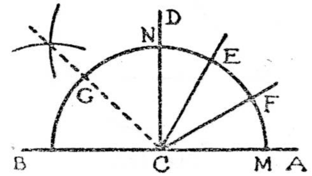


Fig. 119

Se quisermos construir um $\angle$ de 30°, traçaremos o arco MN. Fazendo centro no ponto N, *e com o mesmo raio*, determinaremos o ponto F. Se o arco FN tem 60°, o arco MF tem 30°; logo, o $\angle$ central MCF tem 30°.

Observação. Do exposto se deduz o processo para dividir um $\angle$ reto em três partes iguais; portanto, a trisecção de um ângulo reto pode ser feita facilmente com a régua e o compasso.

Traçando a bissetriz de um $\angle$ de 30°, cada uma das metades será um $\angle$ de 15°.

Se quisermos traçar um $\angle$ de 45°, é bastante traçar um $\angle$ reto BCD e, em seguida, dividí-lo em duas partes iguais. Se traçarmos, depois, a bissetriz de uma destas metades, teremos um $\angle$ de 22°30'.

Problema V. Dados dois $\measuredangle$ de um $\triangle$, construir o terceiro.

Sejam A e B os dois $\measuredangle$ dados. Numa reta XY, escolhe-se

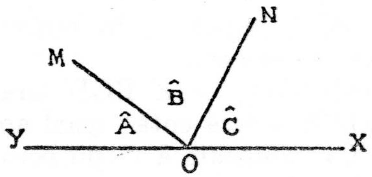


Fig. 120

um ponto qualquer, O. Tomando-se OY como lado e O como vértice, constrói-se o $\angle$ MOY $= \angle$ A. Tomando-se OM como lado e o mesmo vértice O, constrói-se $\angle$ MON $= \angle$ B. Logo, o $\angle$ C é o terceiro $\angle$ do $\triangle$ porque $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2$ retos. (§86, 1.º corolário; §109)

158. Construção do segmento capaz de um ângulo dado. *Problema I.* Construir um segmento capaz de um $\angle$ dado. Seja A o $\angle$ dado. Constrói-se $\angle$ M $= \angle$ A. Cortam-se os lados do $\angle$ M por *uma transversal qualquer* BC, e faz-se passar uma ○ pelos pontos M, B e C. O $\angle$ M tem por medida a metade do arco BC, e todos os $\measuredangle$ inscritos no segmento BMC são iguais ao $\angle$ M; sendo $\hat{M}=\hat{A}$, o segmento BMC é o segmento capaz do $\angle$ A.

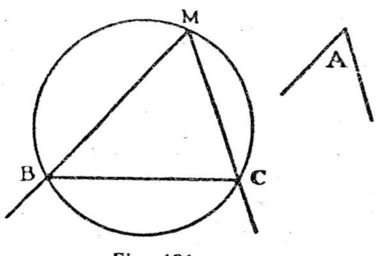


Fig. 121

Entretanto, êste problema é indeterminado; desde que a transversal BC pode ocupar uma posição qualquer, conclue-se que o problema tem uma infinidade de soluções.

Problema II. Construir o segmento capaz de um $\angle$ dado, tendo por corda um segmento retilíneo dado, em grandeza e posição. Seja BC o segmento dado e A o $\angle$ dado. Suponhamos o problema resolvido e seja BMC o segmento pedido, isto é, capaz do $\angle$ A. (§152)

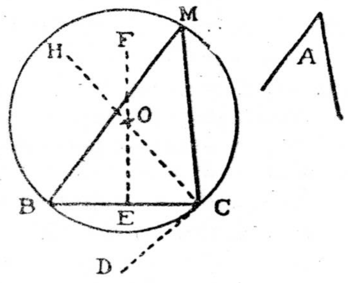


Fig. 122

Tudo consiste em determinar o centro do arco BMC. Sendo BC uma corda dêste arco, o centro está situado na $\perp$ EF à corda BC, traçada pelo centro desta mesma corda. (§136, recíproca do 4.º teorema)

Tracemos pelo ponto C a tangente CD; o $\angle$ BCD terá por medida a metade do arco BC (§150), e será então igual ao $\angle$ M e, portanto, ao $\angle$ A. E sendo CD tangente à ○ no ponto C, se traçarmos CH $\perp$ CD, esta $\perp$ passará pelo centro

do arco BMC. (§139) Logo, o centro dêste arco, devendo estar situado nas semirretas EF e CH, é o ponto de intersecção das mesmas, isto é, o ponto O.

Construção. Tomando BC como lado e o ponto C como vértice, constrói-se $B\hat{C}D=\hat{A}$. Pelo meio de BC traça-se EF $\perp$ BC, e pelo ponto C traça-se CH $\perp$ CD. Fazendo centro no ponto O e com o raio OB traça-se uma ○. O arco BMC desta ○ é o arco de segmento capaz do $\angle$ A; êste arco e o seu simétrico em relação ao segmento BC, constituem *o lugar geométrico dos pontos de onde se vê o segmento* BC *sob um ângulo dado* A. (§ 152)

159. Construção de triângulos. *Problema I.* Construir um $\triangle$, dados os três lados.

Observação. No caso presente supõe-se que os três lados não são dados pelos seus valores numéricos, isto é, pelos seus comprimentos; são dados pelos seus valores geométricos, isto é, são três segmentos retilíneos não medidos aos quais chamaremos a, b e c. Lembremos que o problema é impossível se tivermos um lado qualquer, por exemplo, $a > b+c$ ou $a < b-c$. (§95)

Sejam *a*, *b* e *c* os três lados dados. Traçamos um segmento BC$=a$. E' necessário agora determinar a posição do vértice A. Se a distância do vértice B ao vértice A é o segmento *c*, fazemos centro no vértice B e, com um raio igual ao segmento *c*, traçamos uma ○. (§133) Se a distância do vértice C ao vértice A é o segmento *b*, fazemos centro no vértice C e com um raio igual ao segmento *b*, traçamos uma segunda ○. O vértice A é o ponto de intersecção das duas Ⓢ, e o $\triangle$ pedido é o $\triangle$ ABC.

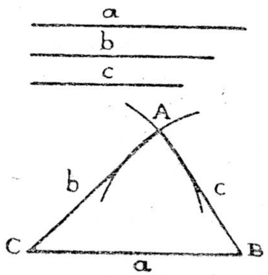


Fig 123

Problema II. Construir um $\triangle$, dados um lado e os dois $\measuredangle$ adjacentes a êste lado.

Seja *a* o lado dado e, B e C, os $\measuredangle$ dados. Traça-se um segmento BC$=a$; em seguida, tomando BC como lado e os pontos B e C como vértices, traçam-se dois $\measuredangle$ que sejam iguais, respectivamente, aos $\measuredangle$ dados B e C. Os lados BA e CA destes dois $\measuredangle$ se encontram em um ponto A, e o $\triangle$ pedido é o $\triangle$ ABC.

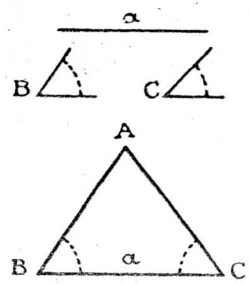


Fig. 124

Observação. O problema é possível quando $\hat{B}+\hat{C} < 2$ retos. (axioma n.º 11 de Euclides; § 109)

Problema III. Construir um $\triangle$, dados dois lados e o $\angle$ por êles formado.

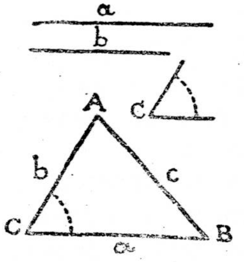


Fig. 125

Sejam *a* e *b* os lados dados e C, o $\angle$ dado. Constrói-se um $\angle$ igual ao $\angle$ dado C. Em um dos lados dêste $\angle$ determina-se um segmento CB igual ao lado dado *a*; no outro lado do $\angle$ C determina-se um segmento CA igual ao lado dado *b*; liga-se o ponto A ao ponto B e o $\triangle$ pedido é o $\triangle$ ABC.

160. Traçado de paralelas. *Problema*. Por um ponto dado fora de uma reta, traçar uma $\parallel$ a esta reta.

Primeiro processo. Já foi explicado. (§ 102, corolário)

Segundo processo. Seja AB a reta dada e C o ponto dado. (fig. 126) Fazendo centro em um ponto qualquer O da reta AB e com um raio igual a OC, traça-se uma semicircunferência ACB. Em seguida, determina-se o ponto D, de modo que arco BD = arco AC, e liga-se o ponto C ao ponto D. As retas AB e CD são $\parallel$. (§ 140)

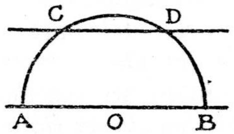


Fig. 126

Terceiro processo. Seja AB a reta dada e C o ponto dado. (fig. 127) Fazendo centro em C e com um raio qualquer CD, traça-se o arco DX; fazendo centro em D *e com o mesmo raio* CD, traça-se o arco CE; determina-se o ponto F, de modo que arco CE = arco DF; liga-se o ponto C ao ponto F. As retas AB e CF são $\parallel$. Para prová-lo, liga-se o ponto C ao ponto D. Formam-se assim os $\angle$s 1 e 2. Êstes dois $\angle$s são iguais (§ 147, 1.º teorema); são alt.-int. formados pelas retas AB e CF, cortadas pela transversal CD; se êles, os $\angle$s 1 e 2, são iguais, elas, as retas AB e CF são $\parallel$. (§ 103, 1.ª recíproca)

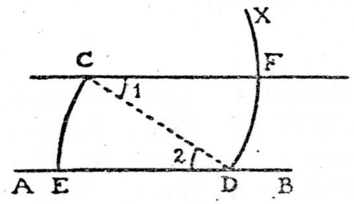


Fig. 127

161. Construção de quadriláteros. *Problema I*. Construir um $\square$, dados dois lados consecutivos e o $\angle$ por êles formado.

Sejam *m* e *n* os lados dados e A, o $\angle$ por êles formado. (fig. 128) Constrói-se um $\angle$ BAD no qual AB = *m* e AD = *n*. Vejamos agora como se determina o quarto vértice do $\square$, isto é, o vértice C. A distância do vértice C ao vértice D é igual a AB (§ 112); portanto, o vértice C está situado em uma ○ de centro D e raio AB. A distância do vértice C ao vértice B é igual a AD; logo, o vértice C está situado em uma ○ de centro B e raio AD. Nestas condições, o vértice C está situado na intersecção das duas ⓢ. Determinada a posição do vértice C, liga-se êste ponto aos pontos B e D e ter-se-á o $\square$ pedido.

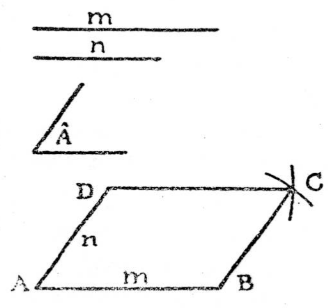


Fig. 128

Problema II. Construir um retângulo, dados dois lados consecutivos, isto é, o comprimento e a largura.

Problema III. Construir um losango, sendo dados o lado e um dos $\angle$s.

Problema IV. Construir um quadrado, dado o lado.

Problema V. Construir um quadrado, dada a diagonal.

Traça-se um $\angle$ reto MAN e a bissetriz AX dêste mesmo $\angle$. Na bissetriz AX toma-se um segmento AC igual à diagonal dada. Pelo ponto C traçam-se as retas CB e CD, respectivamente $\perp$s aos lados AM e AN; ABCD será o quadrado pedido.

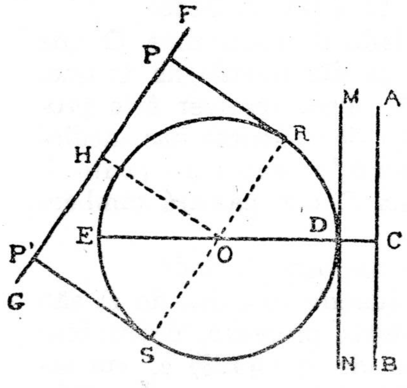


Fig. 129

162. Traçado de tangentes. *Problema I*. Por um ponto dado em uma ○, traçar uma tangente à mesma ○.

Seja A o ponto dado na ○. (fig 129.) E' bastante traçar a reta AB $\perp$ ao raio OA. A reta AB será tangente à ○. (§ 139)

Problema II. Traçar uma tangente a uma ○ dada, e $\parallel$ a uma reta dada.

Seja AB a reta dada. (fig.129) Pelo centro da ○ traça-se EOC $\perp$

AB. A reta EOC corta a ○ nos pontos E e D. Pelos pontos E e D traçam-se MN e M'N' ⊥s ED; estas duas ⊥s serão tangentes à ○ (§ 139) e serão ∥ à AB. (§ 102)

Problema III. Traçar uma tangente a uma ○ dada e ⊥ a uma reta dada.

Seja GF a reta dada. (fig. 129) Traça-se o diâmetro RS, paralelo à reta dada. Pelos pontos R e S traçam-se RP e SP' ⊥s RS; estas duas ⊥s à RS serão também ⊥s à FG (§ 102, 3.º corolário do postulado de Euclides), e serão tangentes à ○. (§ 142)

Problema IV. Por um ponto dado fora de uma ○, traçar uma tangente à mesma ○. (fig. 130)

Seja O o centro da ○ dada e A o ponto dado. Une-se o ponto A ao centro da ○ e sôbre AO como diâmetro traça-se uma ○ auxiliar, a qual corta a ○ dada nos pontos B e C. Une-se o ponto A aos pontos B e C. As retas AB e AC são tangentes à ○ de centro O. Para prová-lo, traçam-se os raios OB e OC. Os ∡s ABO e ACO são retos. (§ 149, 2.º corolário) Logo, AB e AC são respectivamente ⊥s aos raios OB e OC nas suas extremidades. Então AB e AC são tangentes à ○ de centro O, nos pontos B e C. (§ 139)

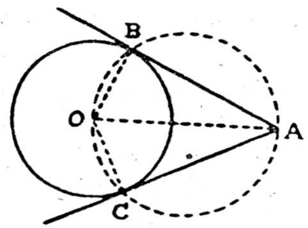


Fig. 130

E' fácil provar que as tangentes AB e AC são iguais, e formam ∡s iguais com o segmento AO.

Problema V. Circunscrever uma ○ a um △ dado.

Circunscrever uma ○ a um △ dado é traçar uma ○ que passe pelos três vértices do △. Êste se diz *inscrito* na ○ que, por sua vez, se diz *circunscrita* ao △. Para resolver êste problema é bastante determinar o ponto de concurso das mediatrizes do △ (§ 121) e, em seguida, fazendo centro no ponto P (fig. 78) e, com o raio PA, traçar uma ○ que passará também pelos pontos B e C.

Problema VI. Inscrever uma ○ em um △ dado.

Uma ○ está *inscrita* em um △, quando os lados do △ são tangentes à ○. Para resolver o problema proposto, determina-se o ponto de concurso das bissetrizes do △ (§ 123) e, em seguida, fazendo centro no ponto P (fig. 70) e com o raio PD,

traça-se uma ○ que passará pelos pontos D' e D'' porque PD = = PD' = PD''. Êstes três segmentos sendo ⊥s aos lados do △, e sendo raios da ○ traçada, os lados do △ são tangentes à ○. A ○ está *inscrita* no △ e êste está *circunscrito* à ○.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série LI.

163. Igualdade de figuras planas. No § 97 apresentámos a teoria da igualdade dos △s, de acôrdo com a grande maioria dos autores clássicos. Entretanto, o assunto merece algumas considerações que vamos expor nesta nota.

Duas figuras planas são iguais quando podem ser superpostas, de modo que todos os pontos de uma coincidam com todos os pontos da outra. (Por esta definição deve entender-se que cada ponto A de uma delas coincide com um ponto A' da outra, e reciprocamente).

Quando duas figuras planas e iguais, F e F', estão situadas em um mesmo plano, a superposição delas se pode fazer de dois modos diferentes; ou fazendo a figura F' *deslizar* sobre o plano, sem sair dele, até coincidir com a figura F; ou fazer a figura F' sair do plano comum às duas figuras, *girar no espaço*, e voltar de novo ao mesmo plano, isto é, fazendo o que se chama *um rebatimento da figura* F' e, finalmente, levar esta mesma figura F' a coincidir, *deslizando* sobre o plano, com a figura F.

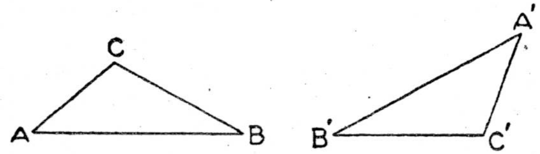


Fig. 131

Os dois casos são essencialmente distintos. Consideremos, por exemplo, os dois △s *iguais* ABC e A'B'C' (fig. 131); fazendo o △ A'B'C' deslizar sôbre o plano, faremos os vértices A', B' e C' coincidir, respectivamente, com os vértices A, B e C. Entretanto, isto não é possível com os △s ABC e A'B'C' (fig. 132); os dois △s sendo *iguais*, coincidirão sòmente se efetuarmos o *rebatimento* de um dêles. Com efeito, podemos fazer A'B' coincidir com AB (fig. 132) mas, se não efetuarmos o rebatimento de um dos △s, os pontos C e C' não coincidirão, ficando de um e do outro lado de A'B' (que está coincidindo com o seu igual AB).

Percorramos os contornos dos ⊿ ABC e A'B'C' (fig. 141) partindo dos pontos A e A', e de acôrdo com a ordem alfabética (A, B, C, A) ; veremos que os dois percursos são realizados *no mesmo sentido*, isto é, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio. Se, partindo dos pontos A e A', fizermos os mesmos percursos, contrariando a ordem alfabética (A, C, B, A) os dois percursos ainda serão realizados *no mesmo sentido*, isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio. E diremos que os ⊿ ABC e A'B'C' (fig. 131) *são do mesmo sentido*.

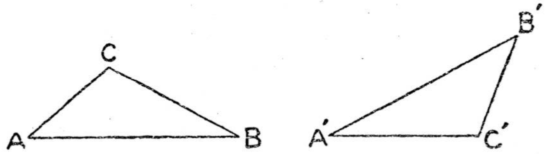


Fig. 132

Entretanto, já não acontece o mesmo com os ⊿ ABC e A'B'C' (fig. 132). Executando os mesmos movimentos realizados com os ⊿ ABC e A'B'C' (fig. 131) verificaremos facilmente que êstes movimentos são de sentidos contrários. E diremos que os ⊿ ABC e A'B'C' (fig. 132) *são de sentidos opostos*.

No primeiro caso (fig. 131) *a igualdade dos dois ⊿ é direta*; no segundo caso (fig. 132) *é inversa*.

De um modo geral, quando *a igualdade* de duas figuras planas, e situadas no mesmo plano, *é direta*, a coincidência de ambas se realiza fazendo uma delas *deslizar* no plano ; se *a igualdade é inversa*, é necessário o *rebatimento* de uma das figuras, para que se realize a coincidência das duas.

Há, por exceção, figuras planas iguais, cuja igualdade é indiferentemente *direta* ou *inversa*: dois ⊿ isósceles iguais, duas Ⓢ com os raios iguais, etc..